

چکیده

نام خانوادگی: مرادی شلال	نام: مهشید
عنوان پایان نامه: پیوند هندسه و جبر	
استاد راهنما: دکتر امیدعلی شهنی کرمزاده	استاد مشاور: دکتر مهرداد نامداری
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد	رشته: ریاضی محض
محل تحصیل: دانشگاه شهید چمران اهواز	گرایش: آموزش ریاضی
تاریخ فارغ التحصیلی: دی ماه ۱۳۹۰	دانشکده: علوم ریاضی و کامپیوتر
تعداد صفحات: ۱۰۰	
واژه‌های کلیدی: هندسه، جبر، برنامه‌ی آموزشی، نرم افزار هندسه پویا، هندسه‌ی جبری، دوگانگی.	
چکیده: یکی از مشکلات آموزش هندسه در سالیان اخیر، عدم ارتباط هندسه با دنیای واقعی و نیز شاخه‌های دیگر ریاضیات است. به خصوص مشکل در تدریس هندسه‌ی جبری در دوره‌ی کارشناسی، به طوری که مدرسین در انتخاب مباحث مشترک برای تدریس، هم عقیده نیستند. با توجه به این موضوع، ارتباط بین هندسه و جبر در سطح مقدماتی را که در دبیرستان‌ها می‌تواند مطرح شود، در این پایان نامه عنوان می‌کنیم. ابتدا به جبر و ضرورت یاددهی و یادگیری آن پرداخته و نقش تفکر جبری در فهم بهتر هندسه و ایجاد توانایی در حل بهتر مسائل هندسی را بیان می‌کنیم. در فصل دوم، اهمیت هندسه در برنامه‌ی آموزشی ریاضی مدرسه‌ای و قدرت بالای هندسه در برقراری ارتباط با موضوعات مختلف را با ارائه‌ی چند مثال مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل سوم هم بر موضوع اصلی یعنی ارتباط هندسه و جبر در عین تفاوت مشهود بین آن دو متمرکز شده و راه‌های پیوند این دو شاخه از ریاضیات را که در سطوح بالاتر به هندسه‌ی جبری منجر می‌شود، مطرح می‌کنیم. در آخر نتایج و پیشنهادات قابل ذکر را بیان می‌کنیم.	

فهرست مطالب

۵	۱ اهمیت جبر و تفکر جبری در هندسه
۵	۱.۱ مقدمه
۶	۲.۱ مقدار قابل توجهی جبر
۶	۳.۱ علم حساب همه جا نمایان است، جبر پنهان است
۷	۴.۱ دلایل اهمیت مطالعه و یادگیری جبر
۷	۱.۴.۱ جبر یک دروازه است
۷	۲.۴.۱ جبر زبان تعمیم است
۸	۳.۴.۱ جبر به فرد توانایی پاسخ گویی همزمان به سؤالات مشابه را می دهد
۹	۴.۴.۱ جبر زبان روابط بین کمیت ها است
۹	۵.۴.۱ جبر زبانی برای حل انواع معینی از مسائل است
۱۰	۶.۴.۱ جبر مطالعه ی ساختارها با ویژگی های معین است
۱۰	۷.۴.۱ جبر نشان می دهد که جهان ما دارای ترتیب است
۱۱	۸.۴.۱ جبر یک پیش نیاز برای همه ی ریاضیات است
۱۱	۵.۱ تفکر جبری در هندسه ی دبیرستانی: استفاده ی دانش آموزان از متغیرها و مجهول ها
۱۲	۱.۵.۱ جبر و هندسه در سطح دبیرستان
۱۳	۲.۵.۱ متغیرها و مجهول ها در نمایش های نمادین
۱۶	۶.۱ معادله ی درجه دوم
۱۸	۷.۱ حل مسائل هندسه به کمک جبر

۲۰	۲ اهمیت هندسه در برنامه‌ی آموزشی ریاضیات و ارتباط آن با دیگر شاخه‌ها
۲۰	۱.۲ مقدمه
۲۱	۲.۲ برنامه‌ی آموزشی ریاضیات مدرسه در انگلستان
۲۴	۳.۲ ماهیت و نقش اثبات - در زمینه‌ی هندسه‌ی پویا
۲۴	۱.۳.۲ اثبات در برنامه‌ی درسی مدرسه
۲۵	۲.۳.۲ رویکردی به اثبات در برنامه‌ی آموزشی ریاضیات UK
۲۷	۴.۲ قدرت هندسه برای آوردن ریاضیات معاصر به زندگی
۲۷	۱.۴.۲ حباب دوتایی استاندارد با حجم‌های برابر
۲۸	۲.۴.۲ یکی شدن سیاه‌چاله‌ها
۲۸	۳.۴.۲ در اهتزاز بودن پرچم
۲۹	۵.۲ هندسه برای درک آنالیز
۳۵	۶.۲ موضوعاتی در آموزش و یادگیری هندسه
۳۵	۷.۲ هندسه چیست؟
۳۸	۸.۲ چرا هندسه در برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه قرار داده می‌شود؟
۴۰	۱.۸.۲ انیمیشن کامپیوتری و نمایش‌های تجسمی
۴۰	۲.۸.۲ تصویربرداری پزشکی
۴۱	۳.۸.۲ طرح به کارگیری کامپیوتر و مدلسازی هندسی
۴۱	۴.۸.۲ رباتیک
۴۲	۵.۸.۲ هندسه‌ی محاسباتی
۴۷	۶.۸.۲ GPS
۴۹	۹.۲ یاددهی و یادگیری هندسه
۴۹	۱.۹.۲ نظریه‌های یادگیری هندسه
۵۱	۱۰.۲ ایده‌های کلیدی در یاددهی و یادگیری هندسه
۵۱	۱.۱۰.۲ تغییرناپذیری
۵۱	۲.۱۰.۲ تقارن

۵۲	۳.۱۰.۲ تبدیل
۵۴	۳ ارتباط هندسه و جبر
۵۴	۱.۳ مقدمه
۵۵	۲.۳ ارتباط بین هندسه و جبر در برنامه‌ی آموزشی ریاضیات مدرسه
۵۶	۳.۳ هندسه در مقابل جبر
۶۰	۴.۳ ایجاد ارتباط بین مفاهیم مختلف ریاضی - در زمینه‌ی هندسه و جبر
۶۱	۱.۴.۳ یک دیدگاه در پیوند هندسه و جبر
۶۲	۲.۴.۳ جئوجبرا در انگیزش آموزش ریاضی و تولید مسائل
۶۸	۳.۴.۳ دیدگاهی دیگر در پیوند هندسه و جبر
۷۲	۵.۳ هندسه‌ی جبری
۷۵	۱.۵.۳ پیوند ماری در ریاضی
۷۷	۲.۵.۳ مثال
۸۱	۴ نتایج و پیشنهادات
۸۱	۱.۴ اثبات در برنامه‌ی آموزشی
۸۱	۲.۴ جبر و تفکر جبری
۸۲	۳.۴ هندسه
۸۳	۴.۴ تناسب
۸۴	۵.۴ هندسه و جبر
۸۵	۶.۴ نگاهی به آینده
۸۶	واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی
۹۰	واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی
۹۳	کتاب نامه

فصل ۱

اهمیت جبر و تفکر جبری در هندسه

۱.۱ مقدمه

«جبر» دروازه‌ی ورود به قلمرویی است که در آن دانش ما از ریاضیات شکل می‌گیرد، توسعه می‌یابد و به جهان پیرامون ما پیوند می‌خورد. این چنین است که جبر بخشی مهم از آموزش ریاضی در دوره‌های عمومی را نه تنها در استرالیا و ایران، بلکه در دیگر کشورهای دنیا، به خود اختصاص داده است.

از نظر تاریخی جبری که تدریس می‌کنیم، به ریاضیدان یونانی، دیوفانتوس^۱ و بابلیان در ۳۵۰۰ سال پیش برمی‌گردد. اما زبان جبر امروز نسبتاً جدید است و به ریاضیدان فرانسوی، ویتیه^۲ در سال ۱۵۹۱ میلادی برمی‌گردد. اوایل^۳ نیز در سال ۱۷۷۰ میلادی محتوای جبر را طبقه‌بندی کرد.

^۱Diophantus

^۲Viete

^۳Euler

۲.۱ مقدار قابل توجهی جبر

جبر در دبیرستان‌های آمریکا در دو قسمت به دانش‌آموزان یاد داده می‌شود. در جبر ۱، معادلات خطی، نامساوی‌ها، نمایش هندسی خطوط، عملیات روی عبارات چند جمله‌ای (شامل فاکتورگیری)، قوانین توان‌های مثبت، سیستم‌های خطی، جذر، عبارت درجه دوم ساده و شاید عبارت گویا تدریس می‌شود. در جبر ۲، ابتدا مفاهیم جبر ۱، مرور و یادآوری شده، آن گاه توان‌های گویا و ریشه‌های n ام، عملیات روی ماتریس‌ها، مفاهیم اساسی توابع، توابع خطی و درجه دوم، توابع نمایی و لگاریتمی و شاید کمی ترکیب و احتمال تدریس می‌شود. منظور از "مقدار قابل توجه جبر" این موارد بود.

اگر دقت کرده باشید گفتیم که این مباحث به دانش‌آموزان یاد داده می‌شد و نگفتیم که یاد می‌گیرند. این موضوع نشان‌دهنده‌ی ضرورت دانستن دانش جبری است. موضوعات جبری بیان شده، به عنوان پیش نیاز در بسیاری از دانشگاه‌ها در نظر گرفته می‌شود، اما بسیاری از دانش‌آموزان باید واحدهای جبر را در دانشگاه اتخاذ کنند. در آمریکا، این موضوع که دانش‌آموزان، هم جبر ۱ و هم جبر ۲ را آموزش ببینند، نه تنها دانش‌آموزانی که قصد رفتن به دانشگاه دارند را شامل می‌شود، بلکه آن‌هایی که دبیرستان را به اتمام نرسانده‌اند را نیز شامل می‌شود. اکنون سعی می‌کنیم بدون داشتن تعصب به ریاضیات، به موقعیت جبر در جهان بنگریم.

۳.۱ علم حساب همه جا نمایان است، جبر پنهان است

بیشتر افراد ضرورت دانستن علم حساب را می‌دانند. اعداد صحیح، کسرها، اعداد اعشاری و درصدها همه جا ظاهر می‌شوند. برای مثال کفایت یک روزنامه برداریم و یک صفحه از آن را به طور اتفاقی نگاه کنیم تا متوجه این موضوع شویم. حتی برای خرید در فروشگاه‌ها، علم حساب بیشتر از جبر مورد استفاده قرار می‌گیرد. افراد ممکن است از ندانستن علم حساب ضرر کنند، ولی به نظر نمی‌رسد که ندانستن دانش جبر آن‌ها را آن چنان تضعیف کند. در انتشارات علمی هم علم حساب بیشتر از جبر ظاهر می‌شود.

در عین حال جبر مهم است، زیرا دانش‌آموزان باید آن را مطالعه کنند. برای ورود به دانشگاه و

گذراندن دروس پیشرفته‌تر و نیز کسب نتایج خوب در بعضی امتحانات، به دانستن جبر نیاز است. اما این دلایل به خوبی بیان نمی‌کنند که چرا جبر باید در برنامه‌ی آموزشی ریاضیات مدرسه قرار بگیرد. اگر از افراد بخواهیم موضوعی را یاد بگیرند که احساس می‌کنند به دانستن آن نیازی ندارند یا برای آن‌ها کاربردی در زندگی روزمره ندارد، یاددهی و یادگیری آن مشکل می‌شود و همچنین از یادگیری آن لذت نمی‌برند. باید بگوییم که افراد از خواندن جبر بیشتر از خواندن حساب لذت می‌برند و این گرایش به جبر از نسلی به نسل دیگر منتقل می‌شود.

۴.۱ دلایل اهمیت مطالعه و یادگیری جبر

دلایل کاربردی برای یادگیری جبر وجود دارد:

۱.۴.۱ جبر یک دروازه است

در آمریکا بدون دانستن جبر، شخص نمی‌تواند وارد دانشگاه‌های مطلوب شود. همچنین نمی‌تواند بسیاری از مشاغل را اختیار کند. حتی نمی‌تواند وارد برنامه‌های کارآموزی شود. به همین دلیل می‌گوییم جبر یک دروازه است. تا جایی که آموزشگران، مطالعه‌ی جبر را یک حق مدنی نامیده‌اند. با دانستن این موضوع، هنوز هم این سؤال وجود دارد که چرا مطالعه‌ی جبر لازم است؟ دلایل عمده‌ی دیگری را در ادامه بیان کنیم.

۲.۴.۱ جبر زبان تعمیم است

قانون ضرب کسرها به زبان معمولی: برای ضرب کسرها، صورت کسرها را در هم ضرب می‌کنیم، تا صورت کسر حاصل ضرب به دست آید و به طریق مشابه برای به دست آوردن مخرج کسر حاصل ضرب عمل می‌کنیم.

برای مثال:

$$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{(2)(4)}{(3)(5)} = \frac{8}{15}$$

این قانون به زبان جبری این گونه است:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{(a)(c)}{(b)(d)} = \frac{ac}{bd}$$

پس زبان جبر کوتاه‌تر از زبان معمولی است و نیز شبیه به زبان حساب می‌باشد. بنابراین زبان جبر آسان‌تر از زبان معمولی است.

همانطور که می‌دانیم فرمول‌هایی برای مساحت وجود دارد که در ساده‌ترین شکل ممکن، به شخص کمک می‌کند که مساحت سطح یا دیوار را محاسبه کند. همچنین فرمول‌های مرتبط با محیط، حجم و حتی احتمال که به شیوه‌ی عملی در زندگی روزمره به کار گرفته می‌شود. به عنوان مثال در ساخت نرده در اطراف یک زمین، به دست آوردن درصد احتمال پیروزی یک تیم، تعیین مالیات بر درآمد، مالیات بر فروش کالا، تخفیف و هر موضوع مالی دیگر فرمول‌هایی به کار گرفته می‌شوند. افراد می‌توانند بدون استفاده از فرمول‌ها هم کارهای خود را پیش ببرند، اما دانستن جبر به آن‌ها کمک می‌کند که کمتر بوسیله افراد سودجو فریب بخورند و به خود متکی باشند.

۳.۴.۱ جبر به فرد توانایی پاسخ‌گویی همزمان به سؤالات مشابه را می‌دهد

به عنوان مثال، تاریخ رویداد خاصی را در ذهن داریم، می‌خواهیم بدانیم که این رویداد، در چه روزی از هفته اتفاق افتاده است. شاید بتوانیم با در نظر گرفتن روزی که در آن هستیم و به عقب برگشتن، و نیز در نظر گرفتن سال‌های کیسه، پاسخ را بیابیم. اما اگر سؤالات بسیاری از این نوع داشته باشیم، برای پاسخ‌دهی نیاز به فرمول داریم. یکی از این فرمول‌ها به قرار زیر است:

$$W = d + 2m + \left[\frac{3(m+1)}{5}\right] + y + \left[\frac{y}{4}\right] - \left[\frac{y}{100}\right] + \left[\frac{y}{400}\right] + 2$$

d : روز، m : ماه (فوریه و ژانویه را به عنوان سیزدهمین و چهاردهمین ماه سال قبل در نظر بگیرید)،
 y : سال

وقتی که W محاسبه شد، آن را بر ۷ تقسیم کرده و باقیمانده که از ۰ تا ۶ می باشد، نشان دهنده ی روز هفته می باشد (۰ یعنی شنبه، ۱ برابر با یکشنبه، ...، ۶ یعنی جمعه).

۴.۴.۱ جبر زبان روابط بین کمیت هاست

همه ی افراد باید معانی روابط ریاضی معین، که در زبان معمولی بسیار ظاهر می شوند، را بدانند. از قبیل: رشد نمایی، رشد لگاریتمی، تغییر مستقیم، قانون جذر معکوس، خط برازش (در آمار و همچنین جبر)، نرخ تغییرات (در ریاضی عمومی و همچنین جبر)، نزدیک شدن غیرهمزمان، برون یابی، درون یابی و غیره، که در بسیاری از موقعیت ها با این موضوعات مواجه می شوند.

۵.۴.۱ جبر زبانی برای حل انواع معینی از مسائل است

در گذشته، تنها مسائلی که به زبان ریاضی ترجمه می شد، در کتاب های درسی جبر وجود داشت، که این مسائل، مسائل گفتاری یا مسائل لفظی نامیده می شد. امروزه مسائل، شامل موقعیت ها و جریان های عادی و روزمره هستند. چه میزان از یک نوع غذا می توانید بخورید، تا چه اندازه می توانید در یک رژیم خاص باشید و یا تعیین جمعیت یک شهر در سالیان آتی با توجه به نرخ رشد جمعیت آن شهر.

وقتی دو کمیت در یک فرمول به هم مرتبط شده اند، با مشخص بودن یک کمیت، می توانیم کمیت دیگر را به دست آوریم. امروزه تکنولوژی، این امکان را بوجود آورده که با فرمول های پیچیده تر مواجه شویم. استفاده از ماشین حساب گرافیکی، این امکان را فراهم می کند که به مسائل کاربردی، حتی زمانی که الگوریتم جبری برای حل آن ها نداریم، پاسخ دهیم. نمودار توابع و دیگر روابط بین متغیرها "هندسه ی جبر" هستند و این هندسه بدون جبر وجود نخواهد داشت.

۶.۴.۱ جبر مطالعه‌ی ساختارها با ویژگی‌های معین است

ترجمه‌ی یک فرمول جبری مانند $A = LW$ به زبان گفتاری (مساحت = طول ضربدر عرض)، بدون توجه به ویژگی‌های عملیات روی اعداد، چندان سودمند نیست. عملیات روی اعداد، ویژگی‌هایی دارد که امکان دستکاری فرمول‌ها و معادلات دیگر را فراهم می‌کند. همانطور که می‌دانیم اگر $A = LW$ باشد، آن‌گاه (با تقسیم دو طرف تساوی بر L)، داریم: $\frac{A}{L} = W$. این بدان معنی است که از یک فرمول می‌توانیم فرمول‌های دیگری به دست آوریم. پس چون جبر می‌دانیم، لازم نیست بعضی فرمول‌ها را حفظ کنیم، چرا که با دانستن یک فرمول می‌توانیم فرمول مورد نیاز را به دست آوریم.

افرادی که دارای تحصیلات نیستند، نمی‌توانند قدرت استنتاج را درک کنند. استنتاج یک ابزار بسیار قدرتمند است. در قسمت بعد، دلیل اهمیت مطالعه‌ی جبر را با توجه به قدرت استنتاج بیان می‌کنیم.

۷.۴.۱ جبر نشان می‌دهد که جهان ما دارای ترتیب است

جبر در توصیف شگردهای خاص اعداد به وضوح ظاهر می‌شود. به عنوان مثال، عدد صحیحی بر ۹ بخشپذیر است که مجموع ارقام آن بر ۹ بخشپذیر باشد. اما جبر، کاربردهای فراتر دیگری هم دارد. زبان جبر، جنبه‌های بسیاری از جهان ما را شرح می‌دهد. این تصادف نیست که در حدود صد سال بعد از کار ویته در جبر، نیوتن و لایبنیتز، به طور مستقل ریاضیات را گسترش دادند. نیوتن، این ریاضیات را برای شرح قوانین کپلر به کار گرفت. بدین طریق دریافتیم که چرا مدارهای سیاره‌ها ذاتاً بیضوی است. جبر به ما در شرح و بیان انتظارمان در پرتاب تصادفی یک سکه، محاسبه‌ی احتمال پیروزی در بخت آزمایی، میزان تحمل فشار وزن و نیروهای دیگر توسط ساختمان، چگونگی حرکت کشتی نفتی با کمترین هزینه و هزاران فعالیت دیگر که هر روز اتفاق می‌افتد، کمک می‌کند. مثال‌های قبل، شامل رویدادهای واقعی روزمره بودند. اگر بخواهیم اهمیت مطالعه‌ی جبر را برای همه‌ی دانش‌آموزان به طور اساسی بیان کنیم، به دلیل زیر رجوع می‌کنیم.

۸.۴.۱ جبر یک پیش نیاز برای همه‌ی ریاضیات است

کتابی به نام چرا ریاضی، نوشته‌ی رادنی درایور^۴، محدوده‌ی وسیعی از حوزه‌های مختلف ریاضی را شامل می‌شود. مانند علم حساب، جبر، هندسه، بردارها، ترکیبیات و احتمال. اما متداول‌ترین حوزه، حوزه‌ی جبر است. ممکن است روح ریاضیات، هندسه باشد، اما جبر قلب ریاضیات است. بنابراین یک فرد بدون دانستن جبر:

- نمی‌تواند بخش‌های مختلف زندگی خود را کنترل کند،
 - باید برای انجام کارهای خود به دیگران تکیه کند،
 - بسیاری از معانی روزمره را نمی‌فهمد،
 - و قادر نیست ایده‌های بحث شده در فیزیک، شیمی، علوم زمینی، اقتصاد، تجارت، روانشناسی و حوزه‌های بسیار دیگر را درک کند.
- بنابراین اگر هدف تدریس جبر، پرورش افراد مطلع و بهینه‌سازی فرصت‌های کاری برای دانش‌آموزان باشد، مطالعه‌ی جبر یک ضرورت است.

۵.۱ تفکر جبری در هندسه‌ی دبیرستانی: استفاده‌ی دانش‌آموزان

از متغیرها و مجهول‌ها

یک تحقیق که در مدت سه ماه، در دو دبیرستان آمریکا انجام شد، نشان داد که دانش‌آموزان در حل مسائلی از هندسه، که در آن‌ها نیاز به استفاده از متغیرها و مجهول‌ها داشتند، با مشکلاتی مواجه شدند. بعضی از آن مشکلات، مشکلات عمومی دانش‌آموزان در مطالعه‌ی جبر بود، اما مشکلات دیگر عمدتاً به سبب ضعف در فهم مفاهیم جبری یا هندسی بود.

در سال ۱۹۶۰ میلادی، اصلاحات در آموزش ریاضی، تغییرات اساسی را در محتوای هندسه‌ی دبیرستان در آمریکا به وجود آورد. در نتیجه‌ی این اصلاحات، رویکردهای نوین هندسه از قبیل

^۴Rodney Driver

رویکردهای مختصاتی، تبدیلاتی و برداری در برنامه‌ی درسی مورد تأکید قرار گرفت. اما انجام این اصلاحات با مشکل مواجه شد. از طرفی در برنامه‌ریزی درسی مدرسه به منظور یاددهی و یادگیری هندسه، جایگاه ویژه‌ای برای رویکردهای جبری در نظر گرفته شد. چنانکه اکنون تأکید بیشتری بر نوشتن عبارات جبری، جانشینی در یک عبارت، طرح کردن و حل معادلات در برنامه‌ی درسی هندسه وجود دارد.

در همه‌ی این فعالیت‌ها باید مفهوم متغیر و مجهول را دانست. اصطلاحات متغیر و مجهول در موقعیتی مورد استفاده قرار می‌گیرند، که شونفیلد^۵ و آرکاو^۶ در سال ۱۹۸۸ میلادی آن‌ها را به کار برده و تعریف کرده‌اند. متغیر به معنی چیزی است که تغییر می‌کند، یا چندین مقدار دارد. در حالی که یک مجهول، چیزی است که یک مقدار ثابت، اما نامشخص دارد.

۱.۵.۱ جبر و هندسه در سطح دبیرستان

جبر و هندسه پیوندهای تاریخی محکمی دارند. نمادهای حرفی برای نمایش متغیرها، مقادیر ثابت، پارامترها، نام‌گذاری‌ها و از این قبیل در جبر فراوان به کار می‌روند. نمادها در هندسه هم به همان اندازه فراوان هستند. زمانی که دانش‌آموزان نتیجه‌ها را تعمیم می‌دهند، یا مسائل را حل می‌کنند، با متغیرها و مجهول‌ها کار می‌کنند. مانند پیدا کردن اندازه‌ی زاویه‌ها و اضلاع. متغیرها برای بیان جملات عمومی، مشخص کردن روندهای کلی، بررسی عمومیت موضوعات ریاضی و کنترل به طور متناهی یا نامتناهی بسیاری از حالت‌ها به کار می‌روند (شونفیلد و آرکاو، ۱۹۸۸).

معنی یک متغیر در هندسه، مثلاً برای بیان نقطه‌ی متغیر در مسائل مکان هندسی به کار می‌رود. از کاربردهای دیگر جبر در هندسه، نمادها هستند که برای نام‌گذاری نقاط یا رئوس، اضلاع و زاویه‌های اشکال به کار می‌روند. بعضی ارتباط‌های دیگر بین جبر و هندسه در برنامه‌ی درسی دبیرستان در حل مسأله، مدلسازی و حالت‌های مختلف نمایش‌های نموداری، جبری و عددی ظاهر می‌شود. بسیاری از مفاهیم در هندسه همتای خود را در جبر دارند. برای مثال یک نقطه در هندسه، با یک زوج

^۵Schoenfeld

^۶Arcavi

مرتب (y, x) از اعداد در جبر و یک خط، با یک مجموعه از زوج‌های مرتب که در یک معادله‌ی جبری صدق می‌کنند و یک تبدیل با تابعی در جبر ارتباط دارند (شورای ملی معلمان ریاضیات [NCTM]^۷، ۱۹۸۹). نتایج جبری می‌توانند به طور هندسی به دست آیند و نتایج هندسی می‌توانند با به کار بردن جبر اثبات شوند. برای مثال، قضیه‌ی فیثاغورس می‌تواند به صورت جبری با استفاده از فرمول نمایش داده شود.

استفاده از متغیرها و مجهول‌ها به ایده‌ی کلی‌تری از تفکر جبری مربوط می‌شود. تحقیق در زمینه‌ی تفکر جبری به طور خاص بر ارتباط بین جبر و هندسه تمرکز ندارد. هر چند بعضی مطالعات، خط اتصال بین جبر و هندسه (لی و ویلر، ۱۹۸۹)^۸ و ارتباط بین جبر و هندسه (نیکلز، ۱۹۸۶، پوهل، ۱۹۹۷)^۹ را بررسی کرده‌اند. به طور کلی این گونه پذیرفته شده که تفکر جبری سه جزء مرتبط دارد:

- ۱- استفاده از نمادها و روابط جبری؛

- ۲- استفاده از نمایش‌های مختلف؛

- ۳- استفاده از الگوها و تعمیم‌ها (NCTM، ۱۹۹۲، هربرت و براون، ۱۹۹۹، واگنر و کی ران، ۱۹۹۹)^{۱۰}.

این سه شکل از تفکر جبری همواره بررسی می‌شود. اما در این قسمت، تنها استفاده از متغیرها و مجهول‌ها، بیشتر بررسی می‌شوند. حال سؤال این است که دانش‌آموزان دبیرستانی در چه مسیرهایی، تفکر جبری را در هندسه استفاده می‌کنند؟ به خصوص این که، دانش‌آموزان دبیرستانی چگونه متغیرها و مجهول‌ها را در هندسه به کار می‌برند و مشکلات مفهومی مربوطه چه هستند؟

۲.۵.۱ متغیرها و مجهول‌ها در نمایش‌های نمادین

استفاده از متغیرها و مجهول‌ها در ریاضیات، فراوان است. بسیاری از دانش‌آموزان در کار کردن با متغیرها و مجهول‌ها در مسائل ریاضی، با مشکلاتی مواجه می‌شوند. دانش‌آموزان نه تنها باید اجزای

^۷National Council of Teacher Mathematics

^۸Lee & Wheeler

^۹Nichols, Poehl

^{۱۰}Herbert & Brown, Wagner & Kieran

کلیدی مسائل را تشخیص دهند، بلکه باید روابط اساسی مسائل را هم دریابند. نمایش یک موقعیت مسأله‌ی ریاضی، ترسیم روابط و عملیات در آن موقعیت می‌باشد (لنگرال و اسوافورد، ۲۰۰۰)^{۱۱} و نمایش‌های نمادین، مسائل را برای دانش‌آموزان توصیف می‌کنند. دوول^{۱۲} در سال ۲۰۰۲ میلادی بیان می‌کند که تنها از طریق نمایش موضوعات ریاضی می‌توان مستقیماً به آن‌ها دسترسی پیدا کرد و بنابراین تنها می‌توانیم بر نمایش‌های نمادین کار کنیم، زیرا ابزاری برای پردازش فراهم می‌کنند. در هندسه، باید در زمینه‌های متفاوت (زبان طبیعی، نمادی و مجازی) کار کرد و در این مسیر حرکت کرد. جبر بیان می‌کند که هندسه، فرم قدرتمندی از یک نمایش نمادین است.

جان ویر^{۱۳} (۱۹۸۷) اظهار می‌کند: یک نمایش می‌تواند ترکیب سه مؤلفه، شامل نمادهای نوشتاری، موضوعات حقیقی و تصاویر ذهنی باشد. به علاوه، نمایش‌ها می‌توانند مانند موجودهای قابل مشاهده، خارجی باشند، یا این که درونی باشند و در ذهن دانش‌آموزان شکل بگیرند. از سوی دیگر کاپوت^{۱۴} (۱۹۸۹) بیان کرده است که انواع عملیات بر یک نمایش در دو دسته‌ی کلی قرار می‌گیرد: اول، یک عمل ترکیبی است که شامل دستکاری نمادهای یک نمایش می‌باشد و بیشتر از این که به وسیله‌ی مرجع نمادها مورد بررسی قرار بگیرد، به وسیله‌ی ترکیب نمادها هدایت می‌شود. برای مثال در معادله‌ی $x + 3 = 12$ ، که یک دانش‌آموز ممکن است به سادگی ۳ را از دو طرف معادله به صورت الگوریتمی کم کند، تمرکز بر دستکاری نمادها خواهد بود. دوم، عمل معنایی است. این عمل، بیشتر از این که به وسیله‌ی ترکیب انجام شود، به وسیله‌ی مراجع نمادها هدایت می‌شود. برای مثال در معادله‌ی قبل، یک دانش‌آموز ممکن است بگوید: «چه عددی به ۳ اضافه شد که ۱۲ بدست آمد؟». کاپوت اضافه کرد که اکثر فعالیت‌های مربوط به کاربرد نماد، ترکیبی از هر دو عمل ترکیبی و معنایی می‌باشند. در واقع به منظور فهم یک جمله، قبل از این که آن را به صورت جبری نمایش دهیم، یک ترکیب از روندهای مختلف صورت می‌گیرد، که شامل کاربرد قوانین ترکیبی و معنایی می‌باشد (مک گریگور و استاسی، ۱۹۹۳)^{۱۵}.

^{۱۱} Swafford & Langrall

^{۱۲} Duval

^{۱۳} Janvier

^{۱۴} Kaput

^{۱۵} Mac Gregor & Stacey

نماد، صدا یا چیزی قابل دیدن است که به طور ذهنی شکل گرفته و معنی پیدا می‌کند (اسکمپ^{۱۶}، ۱۹۸۷). مفهومی که نماد از طریق آن شکل می‌گیرد، مرجع نامیده می‌شود. نماد، *signifier* و چیزی که نمادین می‌شود *signified* نامیده می‌شود. زمانی از نمادگذاری استفاده می‌کنیم که یک چیز، در بعضی مسیرها غیر موجود یا مفقود باشد و سپس مانند یک جانشین با نماد کار می‌کنیم (پیم^{۱۷}، ۱۹۹۵). در جبر بعضی نمادهای حرفی به عنوان متغیرها، مجهولات، مقادیر ثابت یا پارامترها به کار می‌روند، در حالی که در هندسه نمادهای دیداری از قبیل نمودارها هم به کار می‌روند. اسکمپ اضافه می‌کند که این مطلب مهم است، که از طریق استفاده از نمادهایی که به صورت اختیاری به کار می‌گیریم، افکارمان را کنترل کنیم. استفاده از نمادهای حرفی آسان است اما درک آن‌ها آسان نیست (واگنر^{۱۸}، ۱۹۸۳). بنابراین به نظر می‌رسد که مهارت در استفاده از نمادها، برای دانش‌آموزانی که هندسه یاد می‌گیرند، لازم است. بیشتر ارتباط‌های کمی به صورت جبری بیان می‌شوند، اما نمادهای جبری به خودی خود حرفی برای گفتن ندارند (اسفارد، لین چوسکی، ۱۹۹۴)^{۱۹}. برای مثال، یک عبارت جبری می‌تواند مثل یک روند محاسباتی یا مثل یک موضوع درک شود.

یک متغیر یا مجهول اساساً شکلی از نمایش است، که ارتباط بین دو یا چند موقعیت را نشان می‌دهد (گولدین^{۲۰}، ۲۰۰۲). از نظر کاپوت (۱۹۸۲) دو موقعیت، شامل جهان نمایش داده شده و نمایش دادن جهان وجود دارند. جهان نمایش داده شده، یک مفهوم هندسی است و نمایش دادن جهان، یک نماد جبری است. زمانی که دانش‌آموزان از نماد برای نمایش مجهول یا متغیر استفاده کنند، حل مسائل برای آن‌ها آسان‌تر خواهد بود. به نظر می‌رسد که فکر کردن در مورد نمایش، کار کردن با مسائل را برای دانش‌آموزان آسان‌تر می‌کند. در عین حال نمایش‌های جبری، مشکلاتی برای آنان ایجاد می‌کند. بنابراین ارتباط بین جهان نمایش داده شده (مفهوم هندسی) و نمایش دادن جهان (مجهول یا متغیر) یک مسأله است. هیبرت و کارپنتر (۱۹۹۲)^{۲۱} بر این باورند که موقعیت بیرونی،

^{۱۶}Skemp

^{۱۷}Pimm

^{۱۸}Wagner

^{۱۹}Sfard, Linchevski

^{۲۰}Goldin

^{۲۱}Hiebert & Carpenter

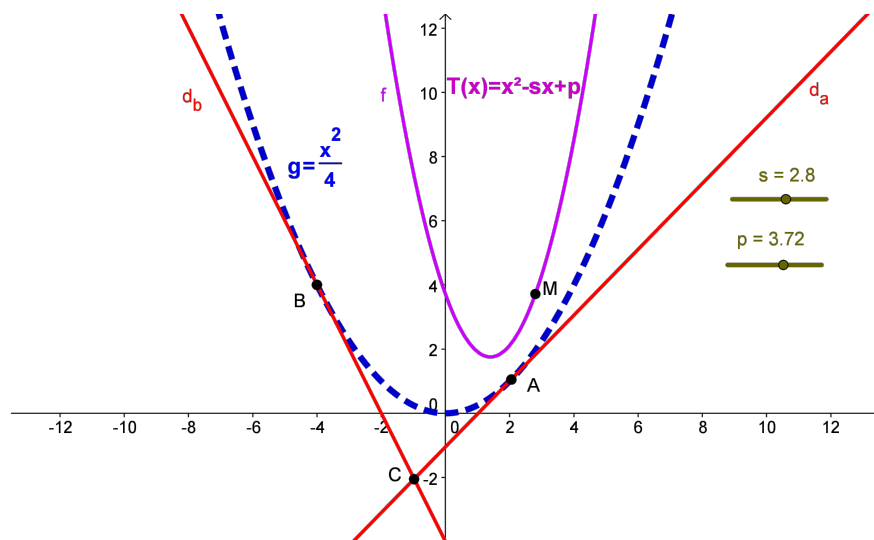
بر نمایش ذهنی فردی تأثیر می‌گذارد و آن نمایش را تحمیل می‌کند. از این رو به نظر می‌رسد که مشکل دانش‌آموزان در تولید یک مجهول یا متغیر، به نمایش‌های ذهنی آن‌ها مرتبط باشد، که این نمایش‌ها از مفاهیم هندسی مرتبط به دست آمده‌اند.

۶.۱ معادله‌ی درجه دوم

یک مبحث مورد توجه در جبر، بحث سه‌جمله‌ای درجه دوم می‌باشد. یک سه‌جمله‌ای به صورت $T(X) = X^2 - sX + p$ را در نظر می‌گیریم. مشخصه‌های مربوط برای این چند جمله‌ای s و p هستند. می‌توانیم $T(X)$ را به وسیله‌ی نقطه‌ی $M = (s, p)$ در صفحه نمایش دهیم. باید مشخص کننده‌ی $\Delta = s^2 - 4p$ را در نظر بگیریم تا نوع ریشه‌ها (حقیقی، مختلط) مشخص شود. با توجه به حالت خاص $\Delta = 0$ ، تابع f را به صورت $f(s) = \frac{s^2}{4} (= p)$ تعریف می‌کنیم و نمودار آن یعنی P (سه‌می درجه دوم نمایش داده شده در شکل ۱.۱) را در نظر می‌گیریم. در حالتی که $\Delta < 0$ باشد، $s^2 - 4p < 0$ و در نتیجه $f(s) = \frac{s^2}{4} < p$ و اگر $\Delta > 0$ باشد، آن‌گاه $f(s) = \frac{s^2}{4} > p$ می‌باشد. در نتیجه نقطه‌ی M ، معرف سه‌جمله‌ای با ریشه‌های مختلط (اما نه حقیقی) درون P ، با ریشه‌های مضاعف روی P و با ریشه‌های حقیقی متمایز، خارج از P قرار می‌گیرد.

حال سؤال این است که سه‌جمله‌ای‌هایی که مقدار داده شده‌ی a ، ریشه‌ی آن‌ها می‌باشد، کجا قرار می‌گیرند؟ پاسخ بسیار ساده است: روی خط راست d_a . داریم $T(a) = a^2 - sa + p = 0$ و d_a خطی است که در نقطه‌ی $A = (2a, a^2)$ بر نمودار P مماس است. برای به دست آوردن نقطه‌ی A و خط d_a به صورت زیر عمل می‌کنیم:

اگر a ریشه‌ی سه‌جمله‌ای باشد، دو حالت پیش می‌آید: ۱. $\Delta = 0$ می‌باشد؛ ۲. $\Delta > 0$. در حالت اول، a ریشه‌ی مضاعف معادله بوده و در نتیجه $s = 2a$ و $p = \frac{s^2}{4} = a^2$ ، در نتیجه نقطه‌ی $A = (2a, a^2)$ روی سه‌می P قرار می‌گیرد. در حالت دوم، معادله علاوه بر a ، ریشه‌ی حقیقی دیگری دارد، آن را e می‌نامیم. پس داریم: $s = a + e$ و $p = ae$ ، حال باید بین معرف‌های سه‌جمله‌ای‌ها، یعنی نقاط M ، در دو حالت ارتباط برقرار کنیم. دو نقطه‌ی $M_1 = A = (2a, a^2)$



شکل ۱.۱: سهمی درجه‌ی دوم

و $M_P = (a + e, ae)$ را در نظر می‌گیریم. تفاضل عرض‌ها به تفاضل طول‌ها مقدار ثابتی می‌شود، زیرا: $\frac{ae - a^2}{a + e - 2a} = \frac{a(e - a)}{e - a} = a$ ، و در نتیجه نقاط مشخص کننده‌ی سه‌جمله‌ای‌ها بر خطی با شیب a قرار دارند و چون مشتق تابع f در نقطه‌ی A برابر با شیب به دست آمده می‌باشد، پس خط گذرنده از نقاط M ، در نقطه‌ی A بر نمودار P مماس است.

d_a فضای بیرونی P را به سه ناحیه تقسیم می‌کند. اکنون به راحتی می‌توانیم موقعیت ریشه‌های سه‌جمله‌ای را که در یک ناحیه معین قرار دارند و وابسته به a هستند، مشخص کنیم (هر دو کمتر از a ، هر دو بزرگتر از a یا در دو طرف a). با استفاده از هندسه‌ی پویا و کشیدن شکل برای سه‌جمله‌ای‌های مختلف، این سه حالت به راحتی قابل مشاهده هستند.

سؤال قبل را برای $a \neq b$ در نظر می‌گیریم. پاسخ، خط راست d_b است که در نقطه‌ی $B = (2b, b^2)$ بر نمودار P مماس بوده و خط d_a را در نقطه $C(a + b, ab)$ قطع می‌کند. در حقیقت این نقطه‌ی تقاطع، مشخص کننده‌ی سه‌جمله‌ای‌هایی است که a و b ریشه‌های آن بوده و در نتیجه $s = a + b$ و $p = ab$.

به طور مشابه، خط d_b فضای بیرونی P را به سه ناحیه تقسیم می‌کند و می‌توانیم موقعیت ریشه‌های سه‌جمله‌ای را که در یک ناحیه معین قرار دارند و وابسته به b هستند، مشخص کنیم. d_a و d_b هر دو، شش ناحیه را به وجود می‌آورند. از این رو موقعیت ریشه‌های وابسته به (a, b) هستند، مشخص

می‌شود.

پس با استفاده از تلفیق آنالیز، هندسه و جبر، می‌توان مسائل را بهتر درک کرد و به شیوه‌ای ملموس‌تر حل کرد، حتی در مورد ایجاد مسائل جدید و بیان مباحث مختلف به روش‌های متنوع فکر کرد. در ادامه، مثالی هندسی بیان می‌کنیم که به کمک جبر می‌توانیم به حل آن پردازیم.

۷.۱ حل مسائل هندسه به کمک جبر

یکی از پر کاربردترین فرمول‌های جبر در اثبات قضایا و حل مسائل هندسی، فرمول جبری قضیه‌ی فیثاغورس است. با استفاده از این فرمول بسیاری از قضایا و مسائل هندسی را می‌توان به چند معادله‌ی جبری تبدیل کرده و با حل این معادلات به پاسخ یا حکم نهایی رسید. به عنوان مثال: دایره‌ی C به شعاع $\frac{1}{4}$ و مرکز b را داریم. دایره‌ی L و R به شعاع $\frac{1}{4}$ را ترسیم می‌کنیم به طوری که قطر هر یک شعاع دایره C باشد. بنابراین این سه دایره برهم مماس هستند. حال دایره‌ی T به مرکز t را درون دایره‌ی C طوری رسم می‌کنیم که دو به دو بر هر یک از سه دایره‌ی قبلی مماس باشد. حال دایره‌ی S به مرکز s را مماس بر دایره‌ی C و L و T ترسیم می‌کنیم. مطلوبست مساحت چهارضلعی $abst$.

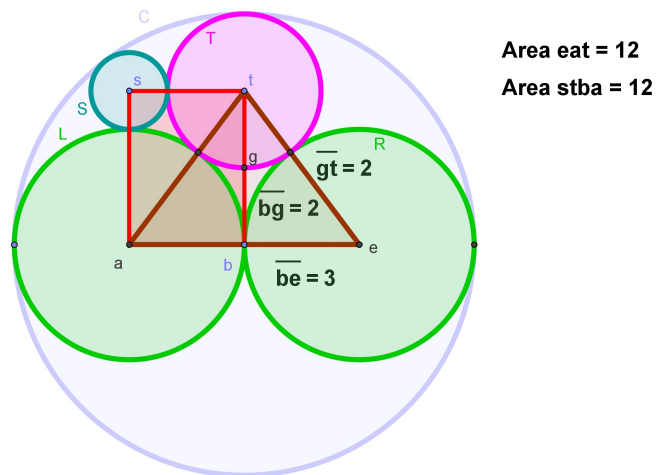
با توجه به شکل (۲.۱)، مساحت چهارضلعی $abst$ برابر با حاصلضرب ab در bt خواهد بود. همچنین داریم $\frac{1}{4} = ab$. اگر اندازه‌ی bt را پیدا کنیم، حل مسأله تمام است. با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

$$(ab)^2 + (bt)^2 = (at)^2$$

و بنابراین داریم:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + (bt)^2 = \left(y + \frac{1}{4}\right)^2$$

همچنین $bt + y = \frac{1}{4}$. اگر این دو معادله‌ی جبری را همزمان حل کنیم، آن گاه داریم: $y = \frac{1}{6}$ و $bt = \frac{1}{12}$ و در نتیجه مساحت مطلوب برابر است با $\frac{1}{12}$.



شکل ۲.۱: مساحت چهارضلعی

فصل ۲

اهمیت هندسه در برنامه‌ی آموزشی ریاضیات و ارتباط آن با دیگر شاخه‌ها

۱.۲ مقدمه

افلاطون بر سر در آکادمی خود نوشته بود: «کسی که هندسه نمی‌داند از این در داخل نشود». او به هندسه برای پرورش فکر و استدلال، اهمیت بسیار می‌داد و اطلاع از هندسه را برای مطالعه‌ی فلسفه لازم می‌دانست، زیرا معتقد بود که هندسه، با وجودی که مجرد و انتزاعی است، محسوس می‌نماید و از نظر وی، این مزیت بزرگ هندسه بود.

از این گذشته، جورج پولیا، ریاضیدان برجسته‌ی قرن بیستم می‌گوید: «اگر تعلیم و تربیت در صدد ارزانی داشتن اندیشه‌ی نظام منطقی به دانشجویان است، باید در آن، مقام خاصی برای استدلال‌های هندسی در نظر گرفته شود؛ حتی استدلال‌های ساده ممکن است از دیدگاه هوش‌افزایی، سودمند شوند».

هندسه به علت مجرد بودن و در عین حال محسوس بودن و به کارگیری استدلال‌های مرتبط بسیار جذاب، وسیله‌ای مناسب برای پرورش فکر است. از این رو باید به هندسه توجه خاصی مبذول داشت.

هم چنان که ارتباط درونی در هندسه به توسعه‌ی مفهوم‌ها کمک می‌کند، ارتباط بیرونی آن یعنی پیوند هندسه با دنیای واقعی و با مقوله‌های دیگر درسی نیز، در ایجاد انگیزه، علاقه‌مندی و افزایش قدرت ریاضی دانش‌آموزان، مؤثر و ضروری است.

۲.۲ برنامه‌ی آموزشی ریاضیات مدرسه در انگلستان

در سال ۱۹۸۸ میلادی معرفی یک برنامه‌ی آموزشی ملی قانونی در انگلستان در برنامه‌ی کاری *UK* قرار گرفت. با توجه به این که تفکیک کردن ریاضیات به حوزه‌هایی مانند اعداد، جبر، هندسه و آمار مناسب است، ولی باید بدانیم که این حوزه‌ها جدا از هم قرار نمی‌گیرند (*UK DES*، ۱۹۸۸، صفحه‌ی ۳). بنابراین ریاضیات در مدارس *UK* به صورت یک موضوع جامع ارائه شده است و دانش‌آموزان در دوره‌های مختلف (هر کدام ۴ تا ۶ هفته) در یک برنامه‌ی آموزشی ریاضیات قرار می‌گیرند، که در آن ریاضیات به صورت یک سری از موضوعات مرتبط با هم (از جبر، هندسه و مانند آن) تدریس می‌شود. همزمان با معرفی برنامه‌ی آموزشی ملی، یک سیستم آزمون ملی هم برای دانش‌آموزان در نظر گرفته شد.

در سال‌های ۱۹۹۵ تا ۲۰۰۰ میلادی این فرم برنامه‌ی آموزشی و آزمون ملی به تدریج قدیمی شد و در نتیجه بیشتر به سوی شکل‌های پاسخگویی مدرسه‌ای از طریق نشر و گسترش، به عنوان مثال، جداول متحد مدارس (بر پایه نتایج آزمون ملی آن‌ها) پیش رفت. در این زمان، مسابقات بین‌المللی مانند *TIMSS* هم در حال توسعه و اعمال تأثیر بیشتری بود. آن چنان که دولت *UK* استراتژی عددی ملی خود را در سال ۱۹۹۸ میلادی بنا نهاد (اداره‌ی آموزش و اشتغال^۱، ۱۹۹۸a، ۱۹۹۸b، ۱۹۹۹). این استراتژی عددی، ضعف‌های مشاهده شده در آموزش ریاضیات، مخصوصاً در سطح ابتدایی را جستجو و بررسی کرد و در ابتدا بر مهارت‌های محاسبه و شمارش متمرکز شد. در این مسیر، توجه زیادی به هندسه نشد (جونز و مونی، ۲۰۰۳)^۲. در همان زمان، درباره‌ی آموزش ریاضیات در سطح دبیرستان مخصوصاً راجع به ناتوانی‌های مشاهده شده در ارائه‌ی اثبات در سطح

^۱Department for Education and Employment

^۲Jones & Mooney

دانشگاه نگرانی‌هایی به وجود آمد (انجمن ریاضی لندن^۳، ۱۹۹۵، انجمن مهندسی^۴، ۱۹۹۹). در طول این دوره، سازمان بین‌المللی ریاضی (ICMI) با تأکید بر یاددهی و یادگیری هندسه، مطالعه‌ای انجام داد (مامانا و ویلانی، ۱۹۹۸)^۵، که در میان موضوعات فراوان دیگر، به ارتباط بین دیدگاه‌های استقرایی و شهودی برای حل مسائل هندسی (جونز^۶، ۱۹۹۸) و ماهیت و نقش اثبات در زمینه نرم‌افزار هندسه‌ی پویا توجه کرد (هوایلز و جونز، ۱۹۹۸)^۷. در قسمت‌های بعدی این فصل، در مورد اثبات و جایگاه آن در برنامه‌ی آموزشی و نیز یاددهی و یادگیری هندسه بیش‌تر صحبت می‌کنیم.

در سال‌های ۲۰۰۰ تا ۲۰۰۵، برنامه‌ی آموزشی موجود انگلستان بازبینی شد. اصلاح برنامه‌ی آموزشی ریاضیات شامل قراردادهای و تصریح‌های روشن‌تری در مورد اثبات بود و تشویق‌های بیشتری برای پیوندهای درونی ریاضیات و پیوند ریاضی با دیگر موضوعات را در برداشت. آزمون ملی در فرم مشابه‌تری همراه با پاسخگویی مدرسه‌ای که در شکل جداول متحد مدارس در رسانه‌ی ملی منتشر شد، بیشتر در اذهان جای گرفت. استراتژی عددی در دبیرستان به عنوان یک استراتژی ریاضی ملی توسعه یافت (اداره‌ی آموزش و اشتغال، ۲۰۰۱).

در این دوره، مجمع سلطنتی UK^۸ و انجمن مشترک ریاضی^۹، یک گروه کاری را برای یاددهی و یادگیری هندسه در سن ۱۱ تا ۱۹ سالگی به کار گرفت (مجمع سلطنتی، ۲۰۰۱). گزارش این گروه خاطر نشان کرد که به هندسه در درون برنامه‌ی آموزشی ریاضیات مدرسه و بیرون از آن اهمیت زیادی داده نشده است و این موضوع به خوبی پذیرفته شد. در میان موضوعات گزارش شده بر حدس، اثبات و اهمیت تفکر فضایی و تجسمی، همچنین بر سودمندی‌های پیوند هندسه با دیگر حوزه‌های ریاضیات و نقش قدرتمند تکنولوژی عددی تأکید شد. برخی توصیه‌های این گزارش، پیش از این درون سیستم مدرسه UK به صورت قانون درآمده بودند، که با ابتکار دولت UK در

^۳London Mathematical Society

^۴Engineering Council

^۵Mammana and Villani

^۶Jones

^۷Hoyles and Jones

^۸UK Royal Society

^۹Joint Mathematical Council

جبر و هندسه، آشکار شد (صلاحیت‌ها و قدرت برنامه‌ی آموزشی^{۱۰}، ۲۰۰۴). این ابتکار، شش پروژه همراه با توسعه‌ی برنامه‌ی آموزشی متعادل را پشتیبانی کرد. این گزارش جامع تأکید بر این دارد که «ایجاد ارتباط بین مفاهیم مختلف ریاضیات برای توسعه‌ی فهم (ریاضیات) اهمیت دارد». در خلاصه‌ی این شش پروژه، دو پیشنهاد برای پیوند جبر و هندسه ارائه شد:

۱- استفاده از ظرفیت نرم‌افزار هندسه‌ی پویا برای ایجاد راه‌های نو و بدیع تجسم روابط جبری؛

۲- استفاده از دیدگاه‌های متفاوت برای درگیر شدن با یک مسأله.

در فصل سوم به طور مفصل‌تر درباره‌ی ایجاد ارتباط بین جبر و هندسه صحبت کرده و با بیان مثال‌های متنوع این رویکردها را به روشنی تشریح می‌کنیم.

پس از سال ۲۰۰۵ میلادی، UK مجدداً برنامه‌ی آموزشی را اصلاح کرد. در این اصلاحات، در حالی که موضوعات مدرسه‌ای موجود در جای خود باقی می‌مانند، در آن‌ها تأکید کمتری بر موضوعات وجود دارد (صلاحیت‌ها و قدرت برنامه‌ی آموزشی، ۲۰۰۵). با این وجود، سیستم آزمون ملی و پاسخگویی قدیمی و فرسوده‌ی مدرسه (با ادامه‌ی استفاده از جداول متحد) پابرجا می‌ماند. حتی اگر دلایل و اسناد بیشتر، سیستمی را پیشنهاد کند که برنامه‌ی آموزشی را به سازمان آزمون محدود کند، و بنابراین نوآوری در برنامه‌ی آموزشی را از بین ببرد و اختیار معلمان را محدود کند (برای مرور وضعیت آموزش ریاضی در UK، آفستد^{۱۱}، ۲۰۰۸ را ببینید).

در این دوره، مطالعه‌ی ICMI در مورد تکنولوژی، در میان بسیاری موضوعات دیگر، طراحی تکنولوژی‌های عددی برای هندسه‌دانان مختلف (جونز، ماکرل و استیونسون، ۲۰۰۹)^{۱۲}، و پروژه‌هایی با حمایت دولت اتحادیه‌ی اروپایی در آموزش هندسه‌ی سه‌بعدی (کریستو، جونز، موسولیدس و پیتالیس، ۲۰۰۶)^{۱۳} و آموزش ریاضیات با نرم‌افزار هندسه‌ی پویا (زاکاریادس، جونز، جیاناکولیا، بیزا، دیاکوموپولس و سویول، ۲۰۰۷)^{۱۴} را بررسی کرد.

همه‌ی این موارد بیان می‌کنند، تا زمانی که موفقیت مسابقه‌های بین‌المللی ریاضیات بتوانند به دولت برده شوند، می‌توان آن‌ها را به سازمان‌های اجرائی محض مربوط به برنامه‌ی آموزشی مقرر و آزمون

^{۱۰}Qualifications and Curriculum Authority

^{۱۱}Ofsted

^{۱۲}Jones, Mackrell & Stevenson

^{۱۳}Christou, Jones, Mousoulides & Pittalis

^{۱۴}Zachariades, Jones, Giannakoulis, Biza, Diacoumopoulos & Souyol

دانش‌آموزی سپرد. همچنین تحقیقات و گزارش‌های افراد دیگر می‌تواند مؤثر باشد.

۳.۲ ماهیت و نقش اثبات - در زمینه‌ی هندسه‌ی پویا

اثبات در قلب ریاضیات قرار دارد. در عین حال می‌دانیم در آموزش ریاضی، اثبات یک مفهوم مفید برای بسیاری از دانش‌آموزان ریاضی است. حال سؤال این است که آیا معرفی سیستم‌های هندسه‌ی پویا این موقعیت را بهتر خواهد کرد یا گذاری از یک اثبات غیررسمی به رسمی در ریاضیات را سخت‌تر خواهد کرد؟ تا چه حد روش‌های نوین تدریس با استفاده از کامپیوترها به دانش‌آموزان در توسعه‌ی یک چارچوب مفهومی برای اثبات کمک می‌کنند و تا چه میزان به آن‌ها کمک می‌کند که اثبات را به عنوان ابزاری برای روشن کردن ایده‌های هندسی به کار بگیرند و آیا کامپیوتر به عنوان بهترین جایگزین برای هر اثباتی قابل استفاده خواهد بود؟

۱.۳.۲ اثبات در برنامه‌ی درسی مدرسه

در برنامه‌ی آموزشی مدرسه، اثبات به طور وسیعی در متن و محتوای هندسه‌ی اقلیدسی آموزش داده شده است. اثبات یک تأیید رسمی از احکامی است، که به دانش‌آموزان گفته شده که درست هستند. این رویکرد، بر فرمول‌بندی دقیق از نمایش استقرائی خطی استاندارد شده‌ی یک استدلال تأکید می‌کند. بدین ترتیب متن و محتوا بیشتر اهمیت دارد. شواهد بعضی تحقیق بیان می‌کنند، که چنین رویکردی به اثبات، مشکلات مفهومی بسیاری برای دانش‌آموزان ایجاد می‌کند. دانش‌آموزان تفاوت سخت و مبهم بین اثبات‌های تجربی و استقرائی را درک نمی‌کنند و به طور کلی کاربرد اثبات تجربی را نسبت به استدلال استقرائی ترجیح می‌دهند (بالاچف، ۱۹۸۸، چازن، ۱۹۹۳، فینلاو باتس، ۱۹۹۴، مارتین و هارل، ۱۹۸۹، پورتیوس، ۱۹۹۰، ویلیامز، ۱۹۷۹)^{۱۵}. برای بسیاری از دانش‌آموزان اثبات استقرائی چیزی بیشتر از مدرک و دلیل تصور نمی‌شود (چازن، ۱۹۹۳،

^{۱۵}Balacheff, Chazan, Finlow-Bates, Martin & Harel, Porteous, Williams

ویلیامز، ۱۹۷۹، فیشبین، ۱۹۸۲)^{۱۶}. اثبات به عنوان بخشی از حل مسأله به کار گرفته نمی‌شود و به طور گسترده به عنوان یک فعالیت اضافی غیر مرتبط مورد توجه است. برای مثال، اثبات‌های هندسی و به خصوص روش استقرائی خطی استاندارد شده، غالباً با یادگیرندگانی که نه هدف اثبات را می‌فهمند و نه نقش آن را در فعالیت ریاضی درک می‌کنند، ارتباط برقرار نمی‌کند. اگر اثبات رسمی تنها به عنوان روش توضیح چیزی ارائه شود، که قبلاً درستی آن برای دانش‌آموزان آشکار شده، آن گاه اثبات یک فعالیت بی‌معنی می‌شود (هانا، جانک، ۱۹۹۳، تال، ۱۹۹۲، دی ویلیرز، ۱۹۹۰)^{۱۷}.

۲.۳.۲ رویکردی به اثبات در برنامه‌ی آموزشی ریاضیات UK

در UK یک روش متمایل به فرآیند برای اثبات توسعه یافته است. بدین ترتیب که دانش‌آموزان تقویت می‌شوند تا حدسیات را آزمون و تصحیح کنند و به یک عقیده‌ی شخصی دست یابند که بر تعمیم و نمایش رسمی و دلیل درستی در قالب یک اثبات تأکید کمی دارد. این رویکرد به اثبات و اثبات کردن، در برنامه‌ی آموزشی ملی ریاضیات انگلستان و ولز مورد ستایش است. دانش‌آموزان در یک فرآیند دنباله‌ای، ابتدا از روش‌های استقرائی استفاده می‌کنند، سپس تفاوت بین دلیل تجربی و اثبات ریاضی (فقط برای کسانی که قدرت فهم بیشتری دارند) را درک می‌کنند و سرانجام اثبات‌های رسمی را به دست می‌آورند. این تغییرات «فرآیند - روش» برای اثبات، به وسیله‌ی ساده‌سازی مطالعه‌ی هندسه در قسمت‌های کوچکی از شکل و فضا حاصل می‌شوند.

شاید غفلت از هندسه در تأکید کنونی UK، در رابطه با دانش‌آموزانی که با استدلال تجربی سر و کار دارند، آن چنان مهم نباشد، ولی باعث می‌شود اکثریت دانش‌آموزان اهمیت استدلال منطقی را به خوبی درک نکنند و فرصت‌های کمی برای اثبات یک قضیه‌ی هندسی داشته باشند. مفاهیم این برنامه‌ی آموزشی بر فهم ماهیت گوناگون توجیه و اثبات در ریاضیات مدرسه توسط دانش‌آموزان اثر می‌گذارد که توسط هیالی^{۱۸} و هویلز^{۱۹} در یک بررسی سراسری کشور بر روی ۲۵۰۰ دانش‌آموز به دست آمد (هوایلز، ۱۹۹۷). در واقع حرکت به سوی دید متمایل به فرآیند، دورشدن از امور عادی

^{۱۶}Chazan, Fischbein, Williams

^{۱۷}Hanna, Jahnke, Tall, de Villiers

^{۱۸}Healy

^{۱۹}Hoyles

بی‌معنی است که قبلاً اثبات هندسی را مشخص می‌کردند. تا وقتی که دانش‌آموزان یک نوع تعهد خاص برای امور عادی اقلیدسی دارند، نمی‌توانند نتایج جدید و بهتر هندسه را به عنوان یک نتیجه‌ی مطلوب به خوبی دریابند.

اما در تلاش برای حل این مشکل، مطلوبست که دو جنبه‌ی مهم در ریاضیات را تغییر دهیم: اول این که فقط دیدن یک الگو کافی نیست، لازم است که آن را بفهمیم و به صورت علمی به آن توجه کنیم. دوم این که تنها اجزای مجزای هندسه مهم نیستند، بلکه ساختارها و روابطی که آن‌ها را به هم پیوند می‌دهند، مهم می‌باشند. حال سؤال اصلی این است که اجزای اساسی اثبات و هندسه می‌توانند بدون مراجعه به شکل‌های ساکن اقلیدسی و تفکر و روش اقلیدسی که برنامه‌ی آموزشی قبلی را مشخص می‌کردند، در نظر گرفته شوند.

در توسعه‌ی مفاهیم هندسه‌ی پویا فاکتورهای زیر اساسی هستند:

- ۱- تقویت دانش‌آموزان برای ایجاد حدس‌هایی متمرکز بر روابط بین موضوعات هندسی؛
 - ۲- فراهم کردن ابزار برای دانش‌آموزان به منظور شرح و توضیح فعالیت‌ها و نتایج.
- در این جا باید بگوییم که تفاوت بین ترسیم و شکل مهم است. لابرورد^{۲۰} (۱۹۹۳)، این تفاوت را به طور واضح این گونه بیان می‌کند: «ترسیم، وجود جسمی را بیان می‌کند، در حالی که شکل، یک موضوع تئوری را بیان می‌کند». می‌توان گفت که این رسم‌های هندسی‌اند که به حل سؤال‌های جبری کمک می‌کنند و می‌توان این سؤال‌ها را به صورت شهودی دید و سپس آن‌ها را حل نمود.
- هیلا (۱۹۹۴) ایده‌ی «در هم بر هم کردن^{۲۱}» را برای دانش‌آموزان معرفی می‌کند که: «بعد از این که یک تصویر کشیده شد، اگر نامشخص باشد، می‌توان آن را با درگ کردن، تغییر داد تا قابل تشخیص شود». یکی از مؤلفه‌های طولانی - ثابت برنامه‌ی آموزشی اولیه‌ی هندسه در تعدادی از کشورها بازشناخت و مرتب کردن شکل‌های مسطح ساده و متفاوت است. در برنامه‌ی آموزشی دبیرستان، از دانش‌آموزان انتظار می‌رود با استفاده از خواص چهارضلعی‌ها، توانایی طبقه‌بندی آن‌ها را براساس خواصشان داشته باشند. در واقع در هندسه با شناخت دایره و انواع مثلث‌ها و چهارضلعی‌ها و خواص این اشکال هندسی، می‌توان بهتر فهمید که مسائل جبری را می‌توان به کمک کدام یک از

^{۲۰} Laborde

^{۲۱} messingup

این اشکال حل کرد.

زمانی که یک مسأله‌ی جبری به داخل هندسه کشیده می‌شود، باعث می‌شود که دانش‌آموزان شروع به ساختن حدس و فرضیه کنند و این حدس‌ها درباره‌ی رابطه‌ی بین موضوعات هندسی و ساختار آن‌ها خواهد بود، و این یکی از برنامه‌های آموزشی دوره‌ی دبیرستان است. اثبات مسأله به روش‌های مختلف هندسی، سودمندی استفاده از ابزارهای هندسی را یادآور می‌شود.

همانطور که در قسمت‌های قبل بیان کردیم، پیوند هندسه با دنیای واقعی و موضوعات مختلف، می‌تواند در ایجاد انگیزه و علاقه‌مندی به ریاضیات مفید واقع شود. همچنین باعث شود که دانش‌آموزان ریاضی به صورت متفاوتی به پیرامون خود بنگرند. در قسمت بعد، قدرت بالای هندسه در ایجاد ارتباط با مسائل مختلف را تشریح می‌کنیم.

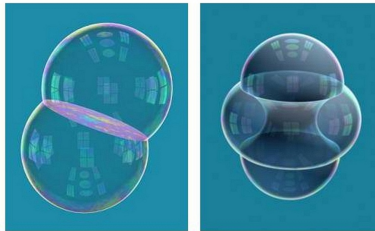
۴.۲ قدرت هندسه برای آوردن ریاضیات معاصر به زندگی

بسیاری از معلمان ریاضی در سرتاسر دنیا با این سؤال از طرف دانش‌آموزان مواجه می‌شوند، که مطالعه‌ی هر قسمت از ریاضیات چه فایده‌ای دارد؟ شکی وجود ندارد که معلمان، پیوسته در تلاش برای پاسخ به چنین سؤالاتی هستند. در عین حال یکی از موضوعاتی که ممکن است در این میان کمک کند، در نظر گرفتن چگونگی قدرت هندسه برای آوردن ریاضیات معاصر به زندگی است. مثال‌هایی مانند حباب دوتایی، سیاه‌چاله‌ها و پرچم‌ها گویای این مطلب است.

۱.۴.۲ حباب دوتایی استاندارد با حجم‌های برابر

حباب دوتایی، یک جفت حباب متقاطع است که به وسیله‌ی سطح کران‌داری که از تقاطع ایجاد شده، از یکدیگر جدا شده‌اند. همانطور که در شکل (۱.۲) نشان داده شده است. در ابتدا این حدس به وجود آمد که مساحت سطحی که دو کره ایجاد می‌کنند، در شکلی که کرانه‌ای از قرص مسطح را به وجود می‌آورند و فضا را به دو حجم برابر تقسیم می‌کنند، کمتر از هر آرایش دیگری است.

این حدس برای دو کره با حجم برابر در سال ۱۹۹۵ میلادی اثبات شد. همچنین نشان داده شده



شکل ۱.۲: حباب دوتایی

که برای دو حباب با حجم نابرابر، مساحت سطح بوجود آمده کاهش می‌یابد و کرانه‌ی جدا کننده به خودی خود جزئی از یکی از کره‌ها می‌باشد. حدس‌های مشابه در مورد حباب سه‌تایی بدون جواب است. برای اطلاعات بیشتر در مورد چنین مسائلی در مورد حباب، بروباکر^{۲۲} (۲۰۰۸) را ببینید.

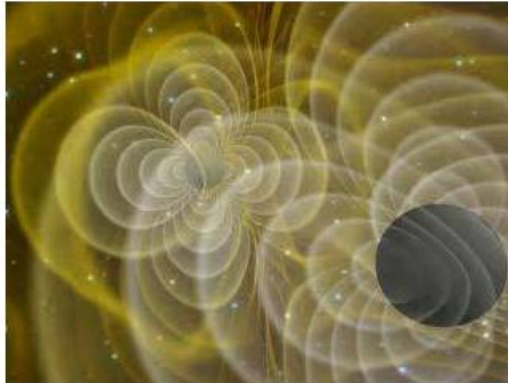
۲.۴.۲ یکی شدن سیاه‌چاله‌ها

در سال ۲۰۰۶ میلادی، دانشمندان ناسا به یک پیشرفت غیرمنتظره در مدلسازی کامپیوتر دست یافتند. آن‌ها توانستند موج‌های جاذبه‌ای سیاه‌چاله‌هایی که یکی می‌شوند را شبیه‌سازی کنند. شبیه‌سازی سه‌بعدی که در شکل (۲.۲) نشان داده شده، بزرگترین محاسبات نجومی انجام شده در یک ابرکامپیوتر ناسا می‌باشد.

۳.۴.۲ در اهتزاز بودن پرچم

طراحی پرچم‌ها گاهی در کلاس ریاضی مدرسه بیان می‌شود. شاید در طول بیان یک موضوع از تشابه. در عین حال مدلسازی حرکت پرچم به صورت ریاضی یکی از تمایلات ریاضیدانان علاقه‌مند به سیستم‌های پویا می‌باشد (چنین ریاضیاتی، حل عددی و تحلیلی معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی

^{۲۲}brubaker



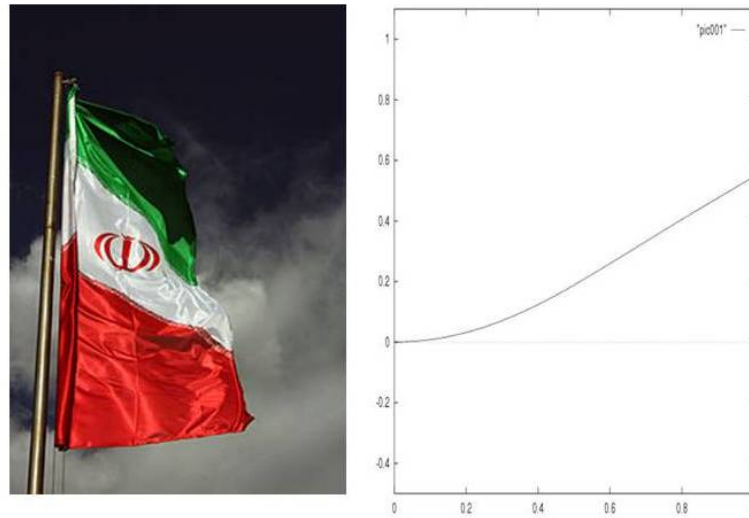
شکل ۲.۲: سیاه‌چاله‌ها

جزئی غیر خطی به وسیله‌ی کرنل‌های کوشی را شامل می‌شود). شکل (۳.۲) را ببینید. قدرت هندسه در برقراری ارتباط بین ریاضیات معاصر و موقعیت‌ها و جریان‌های عادی زندگی، می‌تواند در بیان موضوعات مختلف، نمود پیدا کند. بیان این مسائل در کلاس درس ریاضی بدین معنی است که یادگیرندگان ریاضیات به صورت متفاوتی به حباب‌ها، اجرام نجومی و پرچم‌ها نگاه می‌کنند.

شایسته است که در این قسمت، یکی از ارتباطات مفهومی هندسه با حوزه‌ی دیگری از ریاضیات را با بیان چند مثال به روشنی بیان کنیم.

۵.۲ هندسه برای درک آنالیز

• اگر چه ریاضیات علمی یکپارچه است، اما در دبیرستان در حوزه‌هایی جدا از هم، آموزش داده می‌شود. عموماً یادگیری آنالیز بعد از هندسه صورت می‌گیرد. از این رو کاربرد برخی مفاهیم هندسی در یادگیری آن مفید واقع می‌شود (به عنوان مثال تفسیرهای هندسی برای مشتق و برای انتگرال‌های معین به نظر خیلی دیر بیان می‌شوند). هر حوزه از ریاضی زبان خود را دارد و آنالیز هم از این قاعده



شکل ۳.۲: نمودار مربوط به حرکت پرچم

مستثنی نیست. با توجه به زمان یادگیری آن در دبیرستان که بعد از یادگیری هندسه می‌باشد، بهتر است که زبان آنالیز بر پایه زبان شناخته شده‌ی هندسی بیان و معرفی شود.

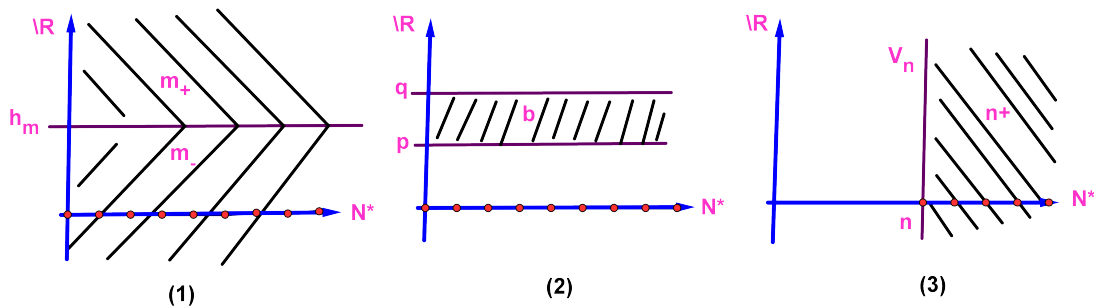
● معمولاً نمایش دنباله $a = (a_n)_{n \geq 0}$ روی محور اعداد حقیقی به صورت $a_1, a_2, \dots, a_{100}, \dots$ بوده و در نتیجه جملات یکی در میان نمایش داده می‌شوند. این شیوه‌ی نمایش، زیاد شهودی نیست و پویایی دنباله را نشان نمی‌دهد و به همین دلیل تا اندازه‌ای درست نیست. یک دنباله نگاشت $a : N^* \rightarrow \mathbb{R}$ است (و a_i یک نمادگذاری برای $a(i)$ است). یک نمایش ساده برای دنباله این است که نمودار $A = \{A_n \mid n \in N^*\}$ را نمایش دهیم که $A_n = (n, a_n)$ اعضای ضرب دکارتی $N \times \mathbb{R}$ می‌باشند. این نمایش گرافیکی ارتباط آنالیز - هندسه را به خوبی مجسم می‌کند. بهتر است که ابتدا مفاهیم اولیه و ساده را بیان کنیم.

● اگر دنباله $a = (a_n)_{n \geq 0}$ را به وسیله‌ی نمودار A نمایش دهیم، مفاهیم کران‌داری (از بالا کران‌دار بودن، از پایین کران‌دار بودن، کران‌دار بودن) به خوبی ظاهر می‌شوند.

● در صفحه‌ی مختصات حاصل از ضرب دکارتی $N \times \mathbb{R}$ ، برای هر $m \in \mathbb{R}$ ، خط راست افقی h_m را در نظر می‌گیریم که این خط، دو نیم صفحه‌ی باز m_+ و m_- که جدا از هم هستند، ایجاد می‌کند (شکل (۱)). اگر $p < q$ باشد، $p_+ \cap q_-$ غیر تهی است و اشتراک آن‌ها نوار افقی b را تشکیل می‌دهد (شکل (۲)). همانطور که در شکل (۳) نشان داده شده، برای هر عدد صحیح مثبت

n ، خط راست عمودی v_n را در نظر می‌گیریم. در نتیجه نیم صفحه‌ی n^+ از خط v_n به سوی اعداد طبیعی بزرگتر از n در نظر گرفته می‌شود.

A اختیاری است و در $\mathbb{R} \times N$ بسته است. در نتیجه موقعیت‌های جالب زیر را خواهیم داشت:



شکل ۴.۲: نمایش دنباله

الف- اگر برای مقدار معلوم m داشته باشیم $A \subset m_-$ ، آن گاه گوئیم دنباله a از بالا کران‌دار است و m یک کران بالای آن است.

ب- اگر برای مقدار معلوم m داشته باشیم $A \subset \mu_+$ ، آن گاه گوئیم دنباله a از پایین کران‌دار است و μ یک کران پایین آن است.

پ- اگر هر دو حالت بالا اتفاق بیفتد، یعنی A درون نوار افقی b قرار بگیرد، گوئیم دنباله a کران‌دار است. باید بدانیم که موقعیت متناهی بودن تعداد نقاط A_n (یعنی مقادیر a_n) خواص از بالا کران‌دار بودن، از پایین کران‌دار بودن و کران‌دار بودن را برای A یا a تغییر نمی‌دهد، تنها ممکن است مقادیر کران‌ها را تغییر دهد، پس در کل مهم نیست. با توجه به این نکته ممکن است بگوئیم برای دنباله‌ها، کران‌داری یک خاصیت مجانبی است.

● ما به دنبال تفسیر هندسی یکنواختی دنباله‌ها نیستیم.

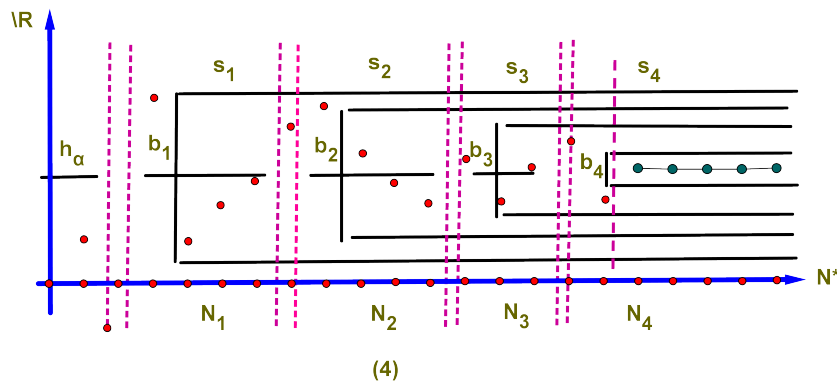
● چون همگرایی یک خاصیت اساسی برای دنباله‌ها است، بهتر است آن را بر اساس کران‌داری تعریف کنیم (با استفاده از تفسیر هندسی بالا). حتی اگر در ریاضیات مقادیر کران‌ها مهم نباشد،

می‌توان باریک‌ترین نوارهای افقی را برای A داشته باشیم تا مفهوم کرانداری و در نتیجه همگرایی را به صورت هندسی تفسیر کنیم. این نکته را هم باید در نظر گرفت که تعداد متناهی نقاط A_n از مجموعه A مانع از انتخاب راحت نواری برای A می‌شوند که به اندازه کافی باریک باشد. چون کرانداری به عنوان یک خاصیت مجانبی ظاهر شده، ترغیب می‌شویم که به جای A و با انتخاب مقدار مناسب n ، $A \cap n^+$ را در نظر بگیریم. این ایده ممکن است بعداً برای معرفی $\limsup$ و $\liminf$ به کار گرفته شود و برانگیزنده باشد.

• آیا ممکن است نوارهایی به آن اندازه باریک، که می‌خواهیم بیابیم؟ در مورد دنباله‌های همگرا جواب مثبت است. برای تعریف آن (در زبان آنالیز) بهتر است تفسیر هندسی شرح داده شده در شکل (۴) را در نظر بگیریم. ابتدا باید توجه کنیم که هر دو نوار باریک باید به طور معمول یک خط راست h_α را در برداشته باشند و تنها یک خط. اکنون برای نوار افقی b_i دو عدد حقیقی p_i و q_i وجود دارد به طوری که $p_i < \alpha < q_i$ ، می‌دانیم که نوارها باز هستند (در این مرحله مناسب نیست که حالت‌های تساوی را داشته باشیم). آن قسمت از نوار b_i که در نیم صفحه‌ی N_i^+ می‌باشد، در نظر گرفته می‌شود (مختصراً در شکل به وسیله‌ی s_i داده شده است). اگر b_i به اندازه کافی باریک نباشد، نوار بهتری مانند b_{i+1} را انتخاب می‌کنیم که در ناحیه‌ی N_{i+1} قرار گرفته است و این روند افزایشی ممکن است به طور نامعلومی ادامه پیدا کند، تا سرانجام نوار باریک مطلوب را بدست آورده و همگرایی را نشان دهیم. شاید تجسم همگرایی بدین صورت، شهود را متقاعد کند، اما بهتر است ابتدا آن را به زبان هندسی بیان کنیم: برای هر نوار مانند b که α را شامل می‌شود، N ای وجود دارد که اگر $s = N^+$ آن گاه $(A \cap s) \subset b$ می‌باشد (قبلاً گفتیم که به جای A و با انتخاب مقدار مناسب n ، $A \cap n^+$ را در نظر می‌گیریم، چون کرانداری یک خاصیت مجانبی است). بدین ترتیب دنباله درون نوار b قرار می‌گیرد و کرانداری ثابت می‌شود.

ممکن است از نظر شهود هندسی نوارهای متقارن را ترجیح دهیم (پس $q = \alpha + \epsilon$ و $p = \alpha - \epsilon$) را در نظر می‌گیریم).

• باید در شکل (۴) یک ایراد را بیان کنیم: N^* نامتناهی است و ما نمی‌توانیم واقعاً آن را ترسیم کنیم، حتی اگر آن را به تعداد زیادی تکه تقسیم کنیم. برای دوری از این موقعیت، لزومی ندارد که نقاطی از N را که دارای مسافت مساوی هستند، در نظر بگیریم. اگر دنباله $r = (r_n)_{n \in N^*}$ را



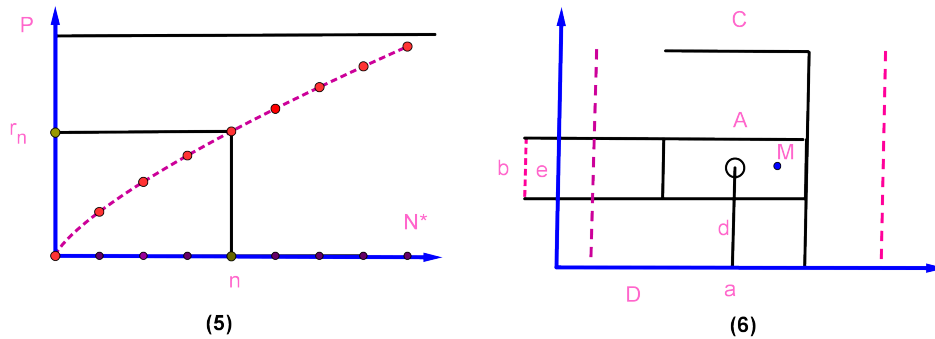
شکل ۵.۲: نمایش دنباله

انتخاب کنیم که به طور یکنواخت و افزایشی به حدش، یعنی p نزدیک می‌شود. آن گاه عدد صحیح و مثبت n را به وسیله‌ی مقدار r_n نمایش می‌دهیم. اگر داشته باشیم $r_1 = 0$ ، نمایشی از N^* درون بازه $[0, p]$ خواهیم داشت (شکل (۵)). خوشبختانه فقط باید به نمودار A که دنباله $a = (a_n)_{n \geq 0}$ را نشان می‌دهد، فکر کنیم و لازم نیست به این فکر باشیم که آن را به طور خاصی رسم کنیم. مقادیر r_n و r_{n+1} شاید آن قدر نزدیک باشند که نتوانیم آن‌ها را روی شکل از هم تشخیص دهیم.

● فرض کنید $D \subset R$ و تابع $f : D \rightarrow R$ و نقطه‌ی انباشتگی برای D باشد. برای این که به طور شهودی نمایش دهیم حد f ، زمانی که $x \rightarrow a$ میل می‌کند، e می‌باشد، همانند شکل (۶)، نه تنها باید نوارهای افقی b را در نظر بگیریم، بلکه باید بعضی نوارهای عمودی مانند c را نیز در نظر بگیریم. نوارهای افقی باید خط h_e و نوارهای عمودی باید خط $d = v_a$ را شامل شوند. به صورت مختصر:

$$(*) \forall b \exists c : x \in c \setminus d \Rightarrow f(x) \in b$$

برای نقطه‌ی $A(a, e)$ باید یک محدوده‌ی خیلی خاص در نظر گرفته شود. ممکن است ابعاد عمودی این محدوده را به دلخواه انتخاب کنیم (بالا و پایین A). اما ابعاد افقی آن وابسته به تابع تحلیلی f تغییر می‌کند. همانطور که در $(*)$ می‌بینیم، جدا کردن d از c مهم است. این کمک می‌کند که درباره‌ی انواع محدوده‌های خاص که از دو ناحیه ساخته شده‌اند، فکر کنیم. یک محدوده، بخشی



شکل ۶.۲: نمایش دنباله

از خط راست d را در بردارد که می‌توانیم آن را در نوار b ببینیم. ارتباط دیگری بین آنالیز و هندسه وجود دارد: تکنیک نمایش گرافیکی که به توابع (اجزای آنالیز)، نمودارهایشان (اجزای هندسه) را نسبت می‌دهد. نباید این ارتباط به خودی خود هدفی یک سویه شود. تصور می‌کنیم فعالیت‌های روزانه نمودارهایی می‌طلبند، ولی ما می‌خواهیم آن‌ها را به صورت تئوری بیان کنیم.

فرض کنید S یک مجموعه باشد. اگر بخواهیم اعضای آن را در صفحه نمایش دهیم، دو جزء اساسی به وسیله نقاط x, y تصویر می‌شوند و هر عضو (در یک چارچوب دکارتی مناسب) به وسیله نقطه‌ای $M = (x, y)$ نمایش داده می‌شود. بعضی زیر مجموعه‌های S ممکن است به وسیله توابع تعریف شوند. حال سؤال این است که این توابع چگونه تعریف می‌شوند. بررسی این سؤال و پاسخ به آن، در آنالیز امکان‌پذیر است.

۶.۲ موضوعاتی در آموزش و یادگیری هندسه

هندسه حوزه‌ی شگفت‌انگیزی برای تدریس ریاضیات است، چرا که پر از مسائل جالب و قضیه‌های شگفت‌آور است، نسبت به بسیاری رویکردهای مختلف باز است و به طور مأنوسی با گسترش ریاضیات ارتباط دارد. هندسه، بخش جامع و کاملی از تجربه‌ی فرهنگی ماست و کاربردی حیاتی در جنبه‌های گوناگون زندگی، به ویژه در فن معماری و طراحی دارد. هندسه، حواس شهودی و زیبایی‌شناسی و دیداری ما را به کار می‌گیرد، در نتیجه می‌تواند علاقه و توجه یادگیرندگان را به خود جلب کند، به خصوص آن یادگیرندگانی که در حوزه‌های دیگر ریاضیات مانند جبر و اعداد، بیشتر دچار سردرگمی و شکست می‌شوند تا هیجان و خلاقیت. تدریس هندسه، دانش‌آموزان بیشتری را برای کسب موفقیت در ریاضیات توانمند می‌کند.

این جنبه‌ها و گفته‌ها به خوبی بیان می‌کند که هندسه یک موضوع مورد نیاز برای آموزش می‌باشد. در آموزش هندسه باید چگونگی شناخت مسائل هندسی جالب و قضایا را بدانیم، زمینه‌ی فرهنگی و تاریخی هندسه را درک کرده و کاربردهای متنوع و فراوان آن را دریابیم. هنگامی که غالباً موضوعات دیگر (به خصوص نیازهای عددی و جبر) بر برنامه‌ی درسی ریاضیات حکمفرما شده، می‌توان آموزش هندسه را برای یادگیرندگان پیشنهاد کرد و یادگیری را برای آن‌ها مهیج و سرگرم‌کننده ساخت و آن‌ها را به سوی فهم و موفقیت بیشتر در شناخت و درک ریاضیات هدایت کرد.

در این قسمت، بعضی ویژگی‌های خاص هندسه و آموزش و یادگیری آن را بیان می‌کنیم. در واقع ماهیت هندسه را بررسی کرده و دلایل قرار گرفتن هندسه در برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه و این که چگونه می‌تواند به بهترین شکل آموزش داده شود را شرح می‌دهیم.

۷.۲ هندسه چیست؟

واژه‌ی *Geometrry* از دو واژه‌ی یونانی باستانی تشکیل شده، یکی به معنای زمین و دیگری به معنای اندازه‌گیری. این واژه‌های یونانی و نیز واژه‌ی *Geometry* ممکن است از واژه‌ی سانسکریت *jyamiti* مشتق شده باشند (در سانسکریت *jya* به معنی خم یا منحنی و *miti* به معنی مشاهده‌ی

صحیح یا اندازه‌گیری است). هندسه بسیار قدیمی است (شاید قدیمی‌ترین شاخه‌ی ریاضیات) و در فرهنگ‌های قدیمی مختلف (شامل هندی، بابلی، مصری و چینی به علاوه‌ی یونانی)، شکلی از هندسه گسترش می‌یافت که با روابط بین طول‌ها، مساحت‌ها و حجم‌های اجسام فیزیکی مرتبط بود. در زمان‌های قدیم، هندسه برای اندازه گرفتن مساحت زمین (یا آن چه که امروز مساحی می‌گوییم) به کار می‌رفت و نیز در ساخت محصولات فرهنگی و مذهبی، مانند اهرام مصر باستان و مثال‌های بسیار دیگر کاربرد داشت.

حدود سیصد سال قبل از میلاد ($300 BCE$)، بیشتر دانش جمع‌آوری شده در زمینه‌ی هندسه در کتابی با عنوان اصول اقلیدس تدوین شد. در ۱۳ کتاب که اصول را در برداشته و بر پایه‌ی ۱۰ اصل موضوعه و قیاس منطقی و صدها قضیه بوده، که به وسیله‌ی منطق استقرایی اثبات شده بودند. اصولی که برای قرون بسیاری روش قیاسی را به تجسم در آورد. شاید هیچ کار دیگری به جز احتمالاً کریستیان بیبل و مسلیم کوران^{۲۳} در چنین وسعتی مطالعه و اصلاح نشد و شاید هیچ کار دیگری نسبت به اصول اقلیدس اثر عظیم‌تری بر تفکر علمی اعمال نکرد. در حالی که بعضی نسخه‌های خطی قرن نهم موجود است، گفته شده که بیشتر از هزار چاپ از اصول اقلیدس، بعد از اولین چاپ در سال ۱۴۸۲ میلادی، انجام شد و برای بیشتر از دو دوره‌ی هزار ساله بر همه‌ی جنبه‌های هندسه، از جمله آموزش آن حکمفرما بود.

در قرن نوزدهم، هندسه همانند بیشتر نظم‌های آکادمیک دچار تحولات عظیم شد. از آن پس، مضمون هندسه و گوناگونی درونی آن تقریباً فراتر از حد تصور افزایش یافته است. به طوری که اکنون هندسه‌ی اقلیدسی فقط یک قسمت فرعی از خانواده‌ی وسیع قضایای ریاضی در رابطه با فضا می‌باشد.

معنی هندسه‌ی دیفرانسیلی، هندسه‌ی هذلولوی، هندسه‌ی لباچفسکی^{۲۴}، هندسه‌ی تصویری، هندسه‌ی بیضوی، هندسه‌ی جبری، هندسه‌ی اقلیدسی، هندسه‌ی مسطح یا هندسه‌ی ریمانی را می‌دانید؟ امروزه می‌توانیم بیش از ۵۰ نوع هندسه را طبقه‌بندی کنیم (مالکویچ^{۲۵}، ۱۹۹۱)، که این غنی بودن هندسه‌ی مدرن را بیان می‌کند. اما سؤالی اساسی را هم برای طراحان برنامه‌ی درسی ایجاد می‌کند که چه نوع

^{۲۳} Christian Bible, Muslim Koran

^{۲۴} Lobachevskian

^{۲۵} Malkevitch

هندسه‌ای باید در برنامه‌ی درسی ریاضی قرار گیرد؟ در حقیقت، چه هندسه‌ای می‌تواند در برنامه‌ی درسی در هر سطحی، از پیش از مدرسه تا دانشگاه به کار رود. برای رویارویی با این سؤال و پاسخ به آن، بهتر است به این سؤال برگردیم که هندسه چیست و همچنین اهداف و مقاصد آموزش هندسه را در نظر بگیریم.

ریاضیدان انگلیسی، کریستوفر زیمن^{۲۶} تعریفی سودمند از هندسه را این چنین ارائه می‌کند: هندسه، آن شاخه‌هایی از ریاضیات را دربردارد که شهود عینی (جالب ترین حواس ما) را برای به یاد آوردن قضیه‌ها، فهمیدن اثبات‌ها، القا کردن حدس‌ها، درک حقیقت و ایجاد بینش جهانی به کار می‌برد (مجمع سلطنتی UK، انجمن مشترک ریاضی، ۲۰۰۱). این‌ها مهارت‌های قابل انتقالی هستند که برای همه‌ی شاخه‌های دیگر ریاضیات و علوم، ضروری هستند. اما توسط آن‌ها آموزش داده نمی‌شوند. گزارش مجمع سلطنتی UK و انجمن مشترک ریاضی، مقاصد آموزش هندسه را این گونه خلاصه می‌کند:

- ۱- به منظور گسترش آگاهی فضایی، شهود هندسی و توانایی تجسم؛
 - ۲- برای ایجاد وسعت نظر تجربه‌های هندسی در ۲ یا ۳ بعد؛
 - ۳- برای گسترش دانش و درک آن و توانایی کاربرد ویژگی‌های هندسی و قضایا؛
 - ۴- برای تشویق گسترش و کاربرد حدس، استدلال استقرایی و اثبات؛
 - ۵- برای گسترش مهارت‌های کاربرد هندسه از طریق مدل‌سازی و حل مسأله در متن دنیای واقعی؛
 - ۶- برای توسعه‌ی مهارت‌های سودمند ICT در زمینه‌های هندسی خاص؛
 - ۷- برای ایجاد گرایش مثبت به ریاضیات؛
 - ۸- برای آگاهی بیشتر از میراث فرهنگی و تاریخی هندسه در جامعه و کاربردهای کنونی هندسه.
- تعاریف ارائه شده از هندسه و توجه به مقاصد آموزش هندسه، امکان پاسخ به این سؤال را فراهم می‌کند که چرا هندسه باید در برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه قرار گیرد.

^{۲۶} Christopher Zeeman

۸.۲ چرا هندسه در برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه قرار داده می‌شود؟

مطالعه‌ی هندسه به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا مهارت‌های دیداری (تجسمی)، تفکر انتقادی، بینش (شهود)، تجسم شیء، حل مسأله، حدس زدن، استدلال استقرایی، استدلال منطقی و اثبات را گسترش دهند. نمایش‌های هندسی می‌توانند در کمک به دانش‌آموزان برای فهمیدن حوزه‌های دیگری از ریاضیات به کار گرفته شوند: تقسیم‌ها و ضرب‌ها در علم حساب، روابط بین نمودارهای توابع (از دو یا سه متغیر) و نمایش‌های گرافیکی داده‌ها در آمار. استدلال فضایی در دیگر حوزه‌های برنامه‌ی درسی از قبیل علوم، جغرافی، هنر، طراحی و تکنولوژی مهم است. کار با تجهیزات کاربردی هم می‌تواند به گسترش مهارت‌های ماشینی مطلوب کمک کند.

هندسه، یک زمینه‌ی غنی تاریخی و فرهنگی ایجاد می‌کند. نتایج بسیار جالب و گاهی اوقات شگفت‌انگیز یا غیر شهودی در هندسه وجود دارد که می‌تواند دانش‌آموزان را تشویق کند تا بیشتر یاد بگیرند و نیز چرایی را بفهمند. اگر هندسه به گونه‌ای ارائه شود که حس کنجکاوی دانش‌آموزان را برانگیزد و آن‌ها را برای اکتشاف تشویق کند، در نتیجه می‌تواند یادگیری را در آن‌ها تقویت کرده و گرایششان را به سمت ریاضیات افزایش دهد. با تشویق دانش‌آموزان برای مطرح کردن مسائلی در هندسه، صحبت کردن درباره‌ی ایده‌هایشان و گسترش بحث‌های دارای ساختار، که در آن از شهود خود بهره می‌گیرند، می‌توانیم مهارت‌های ارتباطیشان را افزایش دهیم و اهمیت اثبات را به آن‌ها نشان دهیم. از طریق هندسه است که می‌توان نقش ریاضیات را در گسترش فرهنگی، اجتماعی، معنوی و فکری دانش‌آموزان فهمید.

هندسه، فرصت‌ها و موقعیت‌های بسیاری برای گسترش اندیشه‌های اثبات ایجاد می‌کند. ارزشمند است که تأکید کنیم، تصاویر تجسمی، به خصوص تصاویری که می‌توان بر صفحه‌ی کامپیوتر ایجاد کرد، دانش‌آموزان را به مشاهده و تعمیم حدس دعوت می‌کنند. دانش‌آموزان به منظور اثبات حدس‌ها باید بفهمند که چگونه تصاویر مشاهده شده به یکدیگر مرتبط می‌شوند و به ساختار اصلی می‌پیوندند. در نرم‌افزار هندسه‌ی پویا، درک تصاویر مشاهده شده به معنای کار با نقاط، دوائر و خطوط موازی و عمود است.

ما در یک جهان سه‌بعدی زندگی می‌کنیم و بیشتر تجربه‌ها و آموخته‌های ما از طریق محرک‌های دیداری و عمل دیدن حاصل می‌شود. در نتیجه توانایی تفسیر اطلاعات دیداری برای زندگی بشری اساسی است. درک بیشتر از چگونگی ارتباط آثار فضایی و استفاده‌ی مطمئن از آن در حل مسائل و فهمیدن موقعیت‌های نو باید بخشی از تجربه‌ی آموزشی همه‌ی دانش‌آموزان باشد. هندسه به گسترش مهارت‌های دیداری و تجسمی کمک بسیاری می‌کند. تجسم به دانش‌آموزان کمک می‌کند که برای اکتشاف مسائل ریاضی و دیگر مسائل به رسم دقیق نمودارها یا کاربرد نمایش‌های نمادین نیازی نداشته باشند. تصاویر ایجاد شده در ذهن می‌تواند درک شهودی موقعیت‌های فضایی را گسترش دهد. به اشتراک گذاشتن تصاویر دیداری و شخصی، هم می‌تواند به گسترش مهارت‌های ارتباطی دانش‌آموزان کمک کند و هم به آن‌ها نشان دهد که راه‌های بسیاری برای تفسیر یک تصویر یا توصیف شفاهی و کتبی وجود دارد.

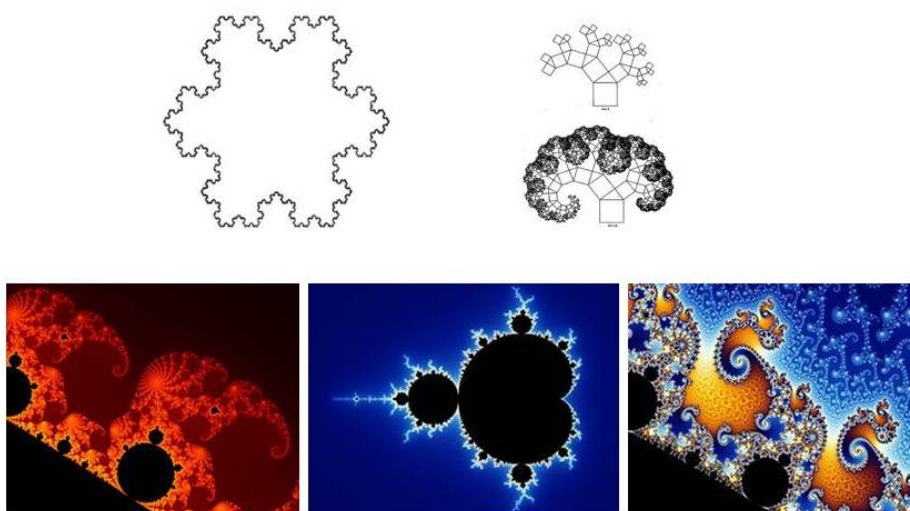
قسمت بیشتر زندگی فرهنگی ما عینی و بصری است. فهم زیبایی هنر، معماری، موسیقی و بسیاری از محصولات مصنوعی و فرهنگی شامل اصول هندسی، تقارن، پرسپکتیو، تناسب، جهت‌یابی و مانند آن می‌باشد. درک بسیاری از اصول علمی و آثار تکنولوژی هم به آگاهی هندسی نیاز دارد، چنان که هوانوردی، جهت‌یابی و خواندن نقشه به آگاهی هندسی نیازمند است. هندسه، بخشی قدرتمند و اساسی در کاربردهای عظیم و متداول ریاضیات است. در موارد بسیاری، مسأله شامل دادن اطلاعات هندسی به کامپیوتر به فرمی سودمند، حل مسائل هندسی و ارائه‌ی جواب در فرمی فضایی یا تجسمی می‌باشد، مانند طرحی که ساخته می‌شود، فعالیتی که اجرا می‌شود یا تصویری که سرگرم‌کننده است. حل این مسائل نیاز به دانش هندسی قابل توجهی دارد.

به طور خلاصه، مثال‌هایی گویا از کاربردهای حیاتی هندسه و ضرورت آموزش آن، توسط وایتلی^{۲۷} بیان شده‌اند:

^{۲۷}whitely

۱.۸.۲ انیمیشن کامپیوتری و نمایش‌های تجسمی

چگونه کامپیوتر می‌تواند تصاویر بسیار غنی از اشیای ایستا و متحرک برای مشاهدات بشری ایجاد کند. یکی از هندسه‌دانان که ویدیو انیمیشن *A Bugs life* را ساخت، آن انیمیشن را تمرینی در کنترل بافت و مدل‌سازی لباس به وسیله‌ی سطوح جدید ریاضیات توصیف کرد. در واقع ریاضیات جدید با پایه‌ی هندسی، مانند فرکتال، بخشی از مدل‌سازی هندسی است.



شکل ۷.۲: فرکتال

۲.۸.۲ تصویربرداری پزشکی

انجام اندازه‌گیری‌های دقیق، نیازمند ایجاد تصاویر سه‌بعدی مناسب از قسمت‌های مختلف بدن است. به عنوان مثال، می‌توان یک سری از طرح‌ها یا تصاویر فراصدا یا تصویر تشدید مغناطیسی (*MRI*) از مسیرها یا نقاط مختلف را ایجاد کرد. حال این سؤال وجود دارد که، چه تعداد اندازه‌گیری برای ایجاد تصاویر سه‌بعدی کامل نیاز است؟ و چه الگوریتمی می‌تواند برای تصویرسازی کامل از قسمت‌های مختلف بدن به کار رود؟ چنین سؤالاتی در حوزه‌های جدیدی مانند پرتونگاری هندسی پاسخ داده می‌شوند.



شکل ۸.۲: *MRI*

۳.۸.۲ طرح به کارگیری کامپیوتر و مدلسازی هندسی

مسأله‌ی اصلی در طرح به کارگیری کامپیوتر (*CAD*)، توصیف، طراحی، اصلاح یا دستکاری کردن اشکال موردنظر ماست. مانند ماشین‌ها، هواپیماها، ساختمان‌ها، مؤلفه‌های مصنوعی و غیره که در طراحی آن‌ها از کامپیوتر استفاده می‌شود. توصیف‌ها باید برای کنترل مستقیم ساخت به قدر کافی دقیق باشند و امکان شبیه‌سازی و امتحان کردن اشیاء را پیش از ساخت هر مدل فیزیکی بدهند. به عنوان مثال، بیشتر هواپیماهای بوئینگ اخیر به طور کامل به وسیله‌ی کامپیوترها و بدون استفاده از مدل‌های فیزیکی طراحی شدند.

۴.۸.۲ رباتیک

برای استفاده از ربات (استفاده از دوربین‌ها، سنسورها و مانند آن) باید یک مدل هندسی از محیط ایجاد کنیم. این که چه واژه‌نامه‌ی هندسی به کار گرفته می‌شود (به عنوان مثال، مدلسازی سه‌بعدی،

تقریب چندسطحی و غیره) و چگونه اطلاعات ساخته می‌شوند، در حوزه‌ای تحقیق می‌شود که هندسه‌ی محاسباتی نامیده می‌شود.

این کاربردها، بعضی دلایل برای بیان ضرورت یاددهی هندسه در برنامه‌ی آموزشی می‌باشند، که توسط وایتلی بیان شدند. برای درک بهتر آن چه گفته شد، یکی از انواع هندسه را به طور مختصر معرفی می‌کنیم.

۵.۸.۲ هندسه‌ی محاسباتی

هندسه‌ی محاسباتی یکی از شاخه‌های علوم کامپیوتر است که برای حل مسائل هندسی از روش‌های الگوریتمی استفاده می‌کند. بعضی از مسائل کاملاً هندسی، برآمده از مطالعه‌ی الگوریتم‌های هندسه‌ی محاسباتی است و مطالعه‌ی این گونه مسائل نیز به عنوان بخشی از هندسه‌ی محاسباتی به حساب می‌آید.

انگیزه‌ی اصلی برای قلمداد کردن هندسه‌ی محاسباتی به عنوان یک رشته‌ی علمی، پیشرفت در گرافیک کامپیوتری، طراحی و تولیدات با کمک رایانه (به وسیله‌ی نرم‌افزارهایی مانند کد^{۲۸}/کم^{۲۹}) بود. ولی طبیعتاً بسیاری از مسائل در هندسه‌ی محاسباتی، قدیمی هستند.

کاربردهای مهم دیگر هندسه‌ی محاسباتی در دانش رباتیک (برنامه‌ریزی حرکتی و مشکلات بصری)، سیستم‌های اطلاعات جغرافیایی (جستجو و مکان‌یابی هندسی، نقشه‌کشی راه‌ها)، طراحی مدار مجتمع (طراحی و بازبینی هندسی مدارهای مجتمع) و مهندسی با کمک رایانه (برنامه‌ریزی ماشین‌های کنترل عددی) می‌باشد.

شاخه‌های اصلی هندسه‌ی محاسباتی عبارتند از:

- هندسه‌ی محاسباتی ترکیبی (هندسه‌ی الگوریتمی): این هندسه‌ی محاسباتی اشیای هندسی را به عنوان موجودات گسسته در نظر می‌گیرد. براساس کتابی که توسط پراپاراتا^{۳۰} و شاموس^{۳۱} نوشته

^{۲۸}CAD

^{۲۹}CAM

^{۳۰}Preparata

^{۳۱}Shamos

شده است، لفظ هندسه‌ی محاسباتی با این مفهوم، نخستین بار در سال ۱۹۷۵ میلادی بیان شده است.

● هندسه‌ی محاسباتی عددی (هندسه‌ی ماشینی، طراحی هندسی با کمک رایانه و یا مدلسازی هندسی): اساس کار این هندسه‌ی محاسباتی این است که اشیای دنیای واقعی را به صورت مناسبی برای محاسبات رایانه‌ای در سیستم‌های کد/کم در آورد. این شاخه ممکن است به عنوان هندسه‌ی توصیفی پیشرفته در نظر گرفته شود و اغلب یکی از شاخه‌های گرافیک کامپیوتری و یا کد به حساب می‌آید. هندسه‌ی محاسباتی با این معنا، از سال ۱۹۷۱ میلادی مورد استفاده قرار گرفت.

هندسه‌ی محاسباتی ترکیبی

هدف اصلی از پژوهش در زمینه‌ی هندسه‌ی محاسباتی ترکیبی این است که برای حل مسائلی که در زمینه‌ی اشیای پایه‌ی هندسی (نقاط، خط‌ها، چند ضلعی‌ها، چند وجهی‌ها و از این قبیل) مطرح می‌شوند، الگوریتم‌ها و ساختارهای داده‌ای مناسبی تولید شود.

برخی از این مسائل به قدری آسان به نظر می‌رسند که تا زمان پیدایش رایانه‌ها مشکل به حساب نمی‌آمدند. برای مثال به مسئله‌ی نزدیک‌ترین جفت توجه کنید:

● n نقطه در صفحه داریم. دو نقطه‌ای که کمترین فاصله را از یکدیگر دارند پیدا کنید. می‌توان فاصله‌ی بین جفت نقطه‌ها، که تعدادشان معلوم هست را پیدا کرد و بعد کوچک‌ترین عدد را انتخاب کرد. این الگوریتم از مرتبه n^2 است. منظور این است که زمان اجراش به مربع تعداد نقاط بستگی دارد. یک نتیجه‌ی کلاسیک در هندسه‌ی محاسباتی ایجاد الگوریتمی بود که از مرتبه‌ی $n \log n$ زمان بگیرد. الگوریتم‌های تصادفی که از مرتبه‌ی n زمان می‌برند، علاوه بر الگوریتم‌های تعیین کننده‌ای که از مرتبه‌ی $n \log n$ زمان می‌برند نیز کشف شده‌اند.

برای GIS جدید، گرافیک کامپیوتری و سیستم‌های طراحی مدارهای مجتمع که روزانه ده‌ها و صدها میلیون نقطه را به کار می‌گیرند، تفاوت بین مرتبه‌ی n^2 و مرتبه‌ی $n \log n$ می‌تواند تفاوت بین روزها و ثانیه‌ها محاسبه، باشد. به همین دلیل است که در هندسه‌ی محاسباتی تأکید زیادی روی پیچیدگی محاسباتی شده است.

انواع مسائل:

مسائل اساسی در هندسه‌ی محاسباتی را می‌توان با در نظر گرفتن معیارهای گوناگون، به روش‌های گوناگونی طبقه‌بندی کرد. یکی از این رده‌بندی‌ها در ادامه آمده است.

مسائل ایستا

در این گروه از مسائل، نوعی ورودی داده می‌شود و خروجی متناسب باید به دست بیاید یا پیدا شود. برخی مسائل اساسی این نوع عبارتند از:

- پوسته‌ی محدب (رویه‌ی محدب): تعدادی نقطه داریم، کوچک‌ترین چند ضلعی یا چند وجهی محدبی را پیدا کنید که دربرگیرنده‌ی همه‌ی نقطه‌هاست.
- تقاطع پاره‌خط‌ها: تقاطع‌های بین تعدادی پاره‌خط را پیدا کنید.
- مثلث بندی دلونی
- دیاگرام ورونوی: با دریافت مجموعه‌ای از نقاط، فضا را بر اساس نزدیک‌ترین نقطه تقسیم‌بندی کنید.
- برنامه نویسی خطی
- نزدیک‌ترین جفت نقطه: با دریافت مجموعه‌ای از نقاط، دو نقطه‌ای را بیابید که کمترین فاصله را دارند.
- کوتاه‌ترین مسیر اقلیدسی: دو نقطه را در فضای اقلیدسی (با یک مانع چند وجهی) با کوتاه‌ترین مسیر به هم وصل کنید.
- مثلث بندی چند ضلعی: با دریافت یک چند ضلعی، سطح داخل آن را به تعدادی مثلث تقسیم کنید.
- پیچیدگی محاسباتی برای این دسته از مسائل براساس زمان و فضای (حافظه‌ی کامپیوتری) لازم برای حل مسأله تقریب زده می‌شود.

مسائل جستجوی هندسی

در مسائل جستجوی هندسی ورودی از دو قسمت تشکیل شده است: قسمت فضای جستجو و قسمت جستجو، که در هر مسأله تغییر می‌کند. قسمت فضای جستجو باید به گونه‌ای پیش پردازش شود که بتواند به نحو مطلوبی به سؤالات متعدد جواب دهد. برخی مسائل اساسی جستجوی هندسی

عبارتند از:

- جست‌وجوی محدوده: مجموعه‌ای از نقاط را پیش پردازش می‌کند، به منظور این که در داخل محدوده‌ی مطلوب، تعداد نقاط را بشمارد.
- محل یابی نقطه: با دریافت فضایی که تقسیم بندی شده، یک ساختار داده تولید می‌کند که به ما می‌گوید نقطه‌ی مورد نظر، در کدام قسمت قرار دارد.
- نزدیک‌ترین همسایه: مجموعه‌ای از نقاط را به این منظور پیش پردازش می‌کند که تعیین کند کدام نقطه، به نقطه‌ی مورد نظر نزدیک‌تر است.
- ردیابی پرتو: با دریافت مجموعه‌ای از اجسام در فضا، یک ساختار داده تولید می‌کند تا تعیین کند که پرتوی جستجوی مورد نظر، نخستین بار با کدام جسم برخورد می‌کند.
- اگر فضای جستجو ثابت باشد، پیچیدگی محاسباتی برای این دسته از مسائل بر اساس مطالب زیر تخمین زده می‌شود:
- زمان و حافظه‌ی لازم برای ساختن ساختار داده‌ای که باید در داخل آن جستجو شود.
- زمان (و برخی مواقع یک حافظه‌ی اضافی) برای پاسخ به جستجوها.
- برای حالتی که فضای جستجو تغییر می‌کند، به مسائل پویا رجوع می‌کنیم.

مسائل پویا

یکی دیگر از گروه‌های اصلی مسائل، مسائل پویا هستند که در آن‌ها هدف، یافتن الگوریتمی مناسب برای یافتن راه حلی است که بعد از هر تغییر داده‌ی ورودی (اضافه یا حذف کردن عناصر هندسی) تکرار شود. الگوریتم‌های این نوع مسائل اغلب شامل ساختارهای داده‌ی پویا است. هر کدام از مسائل هندسه‌ی محاسباتی را می‌توان به مسئله‌ی پویا تبدیل کرد. برای مثال، مسئله‌ی جستجوی محدوده را می‌توان با اضافه کردن امکان اضافه یا حذف کردن نقطه‌ها به مسئله‌ی جستجوی پویای محدوده تبدیل کرد. مسئله‌ی پوسته‌ی محدب پویا، همان کار مسئله‌ی پوسته‌ی محدب را برای مجموعه‌ی نقاطی که به طور پویا تغییر می‌کنند، انجام می‌دهد.

پیچیدگی محاسباتی این دسته از مسائل با توجه به عوامل زیر تخمین زده می‌شود:

- زمان و حافظه‌ی لازم برای ساختن ساختار داده‌ای که باید در داخل آن جستجو شود.
- زمان و حافظه‌ی لازم برای تغییر دادن ساختار داده‌ی مورد جستجو، بعد از یک تغییر در فضای

جستجو.

- زمان (و برخی مواقع یک حافظه‌ی اضافی) برای پاسخ به جستجوها.

حالت‌های گوناگون

می‌توان با برخی داده‌ها به گونه‌ای برخورد کرد که با توجه به محتوایشان جزء هر کدام از گروه‌های معرفی شده قرار گیرند. برای مثال، مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید: نقطه در چند ضلعی: مشخص کنید که یک نقطه‌ی مورد نظر داخل چند ضلعی است یا خارج آن. در بسیاری از موارد با این مسأله به عنوان یک تک تیر برخورد می‌شود، یعنی این که مربوط به گروه اول است. برای مثال، در بسیاری از نمونه‌های گرافیک کامپیوتری یک مسأله‌ی رایج این است که مشخص کند کدام ناحیه از صفحه توسط نشانه‌گر ماوس کلیک شده است. اما در برخی موارد چند ضلعی مورد نظر تغییر ناپذیر است، در حالی که نقطه‌ی مورد جستجو را به نمایش می‌گذارد. برای مثال، چند ضلعی وارد شده می‌تواند نماینده‌ی مرز یک کشور باشد و نقطه، مکان یک هواپیما و مسأله تعیین کردن این است که آیا هواپیما از مرز عبور کرده است یا نه. در نهایت، در مثال‌های بیان شده در گرافیک کامپیوتری ورودی‌های متغیر در ساختارهای داده‌ی پویا ذخیره می‌شوند، تا به حل سؤالاتی که مربوط به نقاط داخل چند ضلعی است، سرعت بخشد.

هندسه‌ی محاسباتی عددی

این شاخه به مدلسازی هندسی و طراحی هندسی با کمک کامپیوتر نیز معروف است و اغلب تحت کلیدواژه‌ی منحنی‌ها و سطح‌ها دیده می‌شود. مسأله‌های اصلی در این نوع از هندسه‌ی محاسباتی، مدلسازی و ارائه‌ی منحنی و سطح می‌باشد. در این جا مهم‌ترین ابزارها، منحنی‌های پارامتری و سطح‌های پارامتری هستند، مانند خم‌های بزی، خم‌ها و سطح‌های نواری. از مهم‌ترین روش‌های غیر پارامتری، روش تنظیم رده است. از نخستین و مهم‌ترین کاربردهای هندسه‌ی محاسباتی عددی، کاربرد در کشتی‌سازی، هواپیماسازی و صنایع ماشین‌آلات می‌باشد. اما امروزه، به دلیل حضور گسترده‌ی رایانه‌ها و پیشرفته‌تر شدن آن‌ها حتی جعبه‌های عطر و شامپو نیز با تکنیک‌هایی که برای کشتی‌سازان دهه‌ی ۱۹۶۰ میلادی ناشناخته بود، طراحی می‌شوند.

حوزه‌های دیگری که مسائل هندسی در آن نمایان می‌شوند: شیمی (شیمی محاسباتی و اشکال

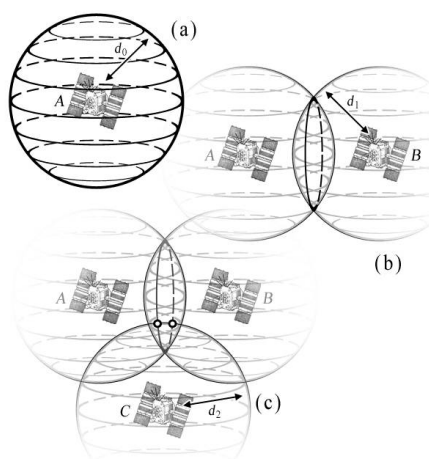
مولکول‌ها)، فیزیک ماده (مدلسازی فرم‌های گوناگون شیشه و مواد متراکم)، زیست‌شناسی (مدلسازی پروتئین‌ها، داروسازی)، سیستم اطلاعات جغرافیایی (GIS) و بیشتر حوزه‌های مهندسی می‌باشند.

۶.۸.۲ GPS

GPS یا سیستم مکان‌یابی جهانی، یک سیستم ناوگانی ماهواره است که از شبکه‌ای با ۲۴ ماهواره ساخته شد و به وسیله‌ی سازمان دفاع آمریکا در مدار قرار گرفت. در ابتدا GPS برای مصارف نظامی به کار گرفته می‌شد. اما در سال ۱۹۸۰ میلادی، دولت آمریکا این سیستم را برای استفاده‌های شخصی در نظر گرفت. GPS در هر شرایط آب و هوایی و در هر جای دنیا، در ۲۴ ساعت شبانه روز قابل دسترسی است و هیچ حق اشتراک یا هزینه‌ای برای استفاده از GPS وجود ندارد. ماهواره‌های GPS در یک مدار معین، دو بار در طی روز به دور مدار زمین می‌گردند و سیگنال‌های اطلاعاتی را به زمین ارسال می‌کنند. دریافت کننده‌ی GPS این اطلاعات را گرفته و برای محاسبه‌ی مکان دقیق کاربر از روش‌های هندسی استفاده می‌کند. در واقع، دریافت کننده‌ی GPS زمان ارسال سیگنال از ماهواره را با زمان دریافت سیگنال مقایسه می‌کند. اختلاف زمان بازگوکننده‌ی میزان فاصله‌ی ماهواره از دریافت کننده‌ی GPS است. با اندازه‌گیری فاصله، از تعدادی چند از ماهواره‌ها، دریافت کننده می‌تواند مکان کاربر را مشخص کرده و آن را روی نقشه‌ی الکترونیکی واحد نمایان کند.

برای توضیح بیشتر تعیین مکان با استفاده از روش‌های هندسی، به توصیف شکل (۹.۲) می‌پردازیم. در شکل (a)، دریافت کننده‌ی سیگنال از ماهواره‌ی A، فاصله‌ی d_1 از آن ماهواره را محاسبه می‌کند و کره‌ای با شعاع d_1 نسبت به ماهواره‌ی A در نظر می‌گیرد. سپس با دریافت سیگنال از ماهواره‌ی B، کره‌ای به شعاع d_2 از ماهواره‌ی B تعیین می‌شود. اگر اندازه‌گیری موفقیت‌آمیز باشد، دو کره باید یا مماس باشند و یا یکدیگر را قطع کنند. اگر کره‌ها مماس باشند، که بعید است این حالت اتفاق بیفتد، می‌توان مکان را تعیین کرد. اما اگر دو کره یکدیگر را قطع کنند، مطابق شکل (b)، مکان مورد نظر باید روی دایره‌ای به فاصله‌ی d_1 از ماهواره‌ی A و به فاصله‌ی d_2 از ماهواره‌ی B باشد. نهایتاً شکل (c) نشان می‌دهد که چگونه با سومین اندازه‌گیری، فاصله‌ی d_3 از ماهواره‌ی C

تعیین می‌شود. در نتیجه مکان مورد نظر یا بر محل تماس دایره و کره می‌باشد (اگر دایره و کره مماس باشند)، یا بر یکی از نقاط تقاطع آن‌ها می‌باشد (اگر دایره و کره یکدیگر را قطع کنند). یکی از این موقعیت‌ها می‌تواند حذف شود. زیرا موقعیت یا شتاب آن غیر ممکن است، به عنوان مثال مکانی که ما را بالاتر از ماهواره‌ها قرار دهد. لازم به ذکر است که معادلات مکان‌یابی که از طریق فرمول‌های فاصله به دست می‌آیند، با روش‌های جبری یا عددی حل می‌شوند.



شکل ۹.۲: GPS

بنابراین یک دریافت کننده‌ی *GPS* با سیگنال‌هایی که از حداکثر سه ماهواره دریافت می‌کند، می‌تواند مسیر حرکت و مختصات دوبعدی (طول و عرض) مکان را محاسبه کند. با در نظر گرفتن چهار یا تعداد بیشتری ماهواره، دریافت کننده می‌تواند مختصات سه‌بعدی (طول، عرض، ارتفاع) مکان کاربر را مشخص کند. زمانی که مکان کاربر مشخص شد، *GPS* می‌تواند سایر اطلاعات نظیر: سرعت، مسیر، فاصله‌ی پیموده شده، فاصله تا مقصد، زمان طلوع و غروب خورشید و غیره را محاسبه کند.

۲۴ ماهواره که بخش فضایی *GPS* را شامل می‌شوند، در مداری با فاصله‌ی ۱۲ هزار مایل از زمین قرار دارند. آن‌ها پیوسته در حال حرکت بوده و در کمتر از ۲۴ ساعت دو دور کامل می‌زنند. این ماهواره‌ها با سرعت تقریبی ۷ هزار مایل در ساعت حرکت می‌کنند.



شکل ۱۰.۲: GPS

۹.۲ یاددهی و یادگیری هندسه

مقدار قابل توجهی از تحقیقات در آموزش ریاضی به یاددهی و یادگیری هندسه اختصاص دارد. این تحقیقات را نمی‌توان خلاصه کرد. اما می‌توان موضوعاتی همچون نظریه‌های تفکر هندسی و یاددهی و یادگیری را از بین آن‌ها بیان کرد.

۱.۹.۲ نظریه‌های یادگیری هندسه

در حوزه‌ی کار نظری که در رابطه با ایده‌های هندسی می‌باشد، احتمالاً شناخته‌شده‌ترین کارها، کار پایاژه (و همکاران) و کار ون - هیلی می‌باشد. کار پایاژه دو زمینه‌ی اصلی دارد. اول این که تفکر و تصور ذهنی ما از فضا یک تعبیر ادراکی نیست، بلکه نمایش و تصور ذهنی ما از جهان، از طریق عمل ما ساخته می‌شود. دومین زمینه، سازماندهی ایده‌های هندسی است که دارای یک ترتیب معلوم می‌باشد و این ترتیب، بیشتر از این که تاریخی باشد تجربی است (و احتمالاً از دید ریاضی منطقی‌تر است). در ابتدا روابط توپولوژیکی از قبیل هم‌بندی، پیوستگی و پیوستاری توسط یادگیرنده تجربه می‌شوند، سپس روابط تصویری (راست خط بودن یا دارای مسیر مستقیم بودن) و در نهایت

روابط اقلیدسی (زاویه‌داری، موازات و فاصله) دنبال می‌شوند. در حالی که می‌دانیم تاریخ هندسه با هندسه‌ی اقلیدسی شروع می‌شود، با هندسه تصویری توسعه می‌یابد و سپس به توپولوژی می‌رسد که روندی عکس نظریه‌ی پیازه در رابطه با یادگیری هندسه و تفکر هندسی دارد.

شواهد موجود بیان می‌کنند که همه‌ی انواع ایده‌های هندسی که پدیدار می‌شوند، متحد و به هم پیوسته می‌شوند. مدل ون - هیلی نیز بیان می‌کند که یادگیرندگان به وسیله‌ی سطوح تفکر در هندسه پیش می‌روند. این سطوح تفکر عبارتند از: تشخیص (دیداری)، توصیفی، انتزاعی - رابطه‌ای و استنتاج رسمی. در اولین سطح، دانش‌آموزان شکل‌ها و طرح‌ها را براساس مثال‌های به هم پیوسته می‌شناسند. در سطح دوم، دانش‌آموزان اشکال را بر اساس ویژگی‌هایشان می‌شناسند. در این مرحله، دانش‌آموز ممکن است فکر کند که متوازی‌الاضلاع شکلی با چهارضلع مساوی است. در سومین سطح، دانش‌آموزان می‌توانند روابط بین دسته‌های مختلف اشکال را دریابند (برای مثال یک مربع فرم خاصی از مستطیل است)، و می‌توانند ویژگی‌های اشکال را به وسیله‌ی استقرای منطقی کشف کنند. در سطح چهارم، دانش‌آموزان می‌توانند یک دنباله‌ی کوتاه از جملات تولید کنند که به طور منطقی یک نتیجه را به وجود می‌آورند و نیز می‌توانند بفهمند که استنتاج، روش تأیید حقیقت هندسی است. بر طبق این مدل، پیش‌روی از یک سطح به سطح بعد از آن، بیشتر به روش تدریس بستگی دارد تا به سن. توضیح این مطلب بر طبق مدل ون - هیلی این است که از معلمان خواسته می‌شود یک برنامه‌ی درسی را آموزش دهند که از سطح دانش‌آموزان بالاتر است.

بر طبق مدل ون - هیلی ممکن نیست که دانش‌آموزان یک سطح را کنار بگذارند. آن‌ها نمی‌توانند چیزی را که معلم در یک موقعیت هندسی می‌بیند، ببینند و بنابراین از این آموزش سودی نمی‌برند. در عین حال بعضی تحقیقات به طور کلی تأیید می‌کنند که سطوح ون - هیلی در توصیف گسترش مفاهیم هندسی دانش‌آموزان (در غیاب هر چیز بهتر) سودمند است. البته این مسأله مشخص نیست که چگونه نظریه، نمایش‌های ذهنی بچه‌ها از مفاهیم هندسی را منعکس می‌کند. مسائل مختلف با ذکر خصوصیات سطوح وجود دارند. برای مثال نامیدن پایین‌ترین سطح با عنوان دیداری: تجسم برای همه‌ی سطوح مورد نیاز و تقاضا است و این حقیقت که یادگیرندگان، تفکر را در بیشتر از یک سطح در تمرین‌های مشابه یا غیر مشابه، در زمینه‌های مختلف به کار می‌گیرند. مدل ون - هیلی رویکرد آموزشی معینی است که دارای چهار مرحله است. تحقیق کمی درباره این مدل صورت

گرفته و بنابراین به طور قطع نمی‌توان گفت که موفقیت‌آمیز است.

۱۰.۲ ایده‌های کلیدی در یاددهی و یادگیری هندسه

به منظور آموزش هندسه به صورت مؤثر و بیان ارتباط مطالب در تمرین‌های کلاس بهتر است ایده‌های کلیدی در هندسه را به ذهن خود بسپاریم. این ایده‌ها عبارتند از:

۱.۱۰.۲ تغییرناپذیری

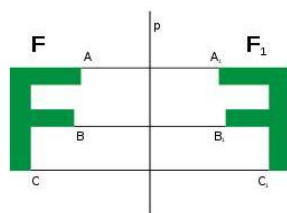
در سال ۱۸۷۲ میلادی، ریاضیدانی به نام فلیکس کلاین^{۳۲}، با ارائه‌ی این تعریف که هندسه، مطالعه‌ی خاصیت‌هایی از یک شکل است که با یک مجموعه از تبدیل‌ها، غیر قابل تغییر هستند، هندسه را به طور اساسی تغییر داد. به عنوان مثال، همه‌ی قضایای زاویه‌ی در صفحه از جمله خصوصیات غیر قابل تغییر هستند (از قبیل قضیه‌ی تالس)، و نیز قضایایی که در رابطه با مثلث‌ها می‌باشد (از جمله این که مجموع زوایای مثلث مسطح ۱۸۰ درجه می‌باشد). دانش‌آموزان، همیشه نمی‌توانند به طور مستقیم تشخیص دهند که کدام ویژگی‌های خاص، غیر قابل تغییر هستند. استفاده از نرم‌افزار هندسه‌ی پویا می‌تواند در این رابطه بسیار سودمند باشد و به دانش‌آموزان برای تشخیص بهتر کمک کند.

۲.۱۰.۲ تقارن

تقارن، یک ایده‌ی کلیدی نه تنها در هندسه، بلکه در سرتاسر ریاضیات است. اما در هندسه بیشترین کاربرد را دارد. به طور تکنیکی می‌توان گفت تقارن، تبدیلی از یک شیء ریاضی است که در آن بعضی خصوصیات تغییر نمی‌کند. به بیانی کلی‌تر، تقارن به معنای تشابه بخش‌ها حول محور یا مرکز تقارن

^{۳۲}Felix klein

است. تقارن غالباً برای ساده کردن اثبات‌ها و معمولاً قدرتمند کردن آن‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. یک مثال از هندسه‌ی مسطح این است که همه‌ی خاصیت‌های اساسی یک متوازی‌الاضلاع می‌توانند از این حقیقت به دست آیند، که متوازی‌الاضلاع حول نقطه‌ی تقاطع قطرهای با یک نیم چرخش متقارن می‌شود. تقارن همچنین یک اصل سازماندهی کلیدی در ریاضیات است. برای مثال، احتمالاً بهترین راه برای تعریف چهارضلعی‌ها (به جز برای دوزنقه که در هیچ حالتی چهارضلعی اساسی نیست، چون هیچ قضیه‌ی جالبی در رابطه با دوزنقه وجود ندارد که برای چهارضلعی‌های دیگر نیز به کار رود)، تعریف از طریق تقارن آن‌هاست.



سقف مسجد شیخ لطف الله اصفهان



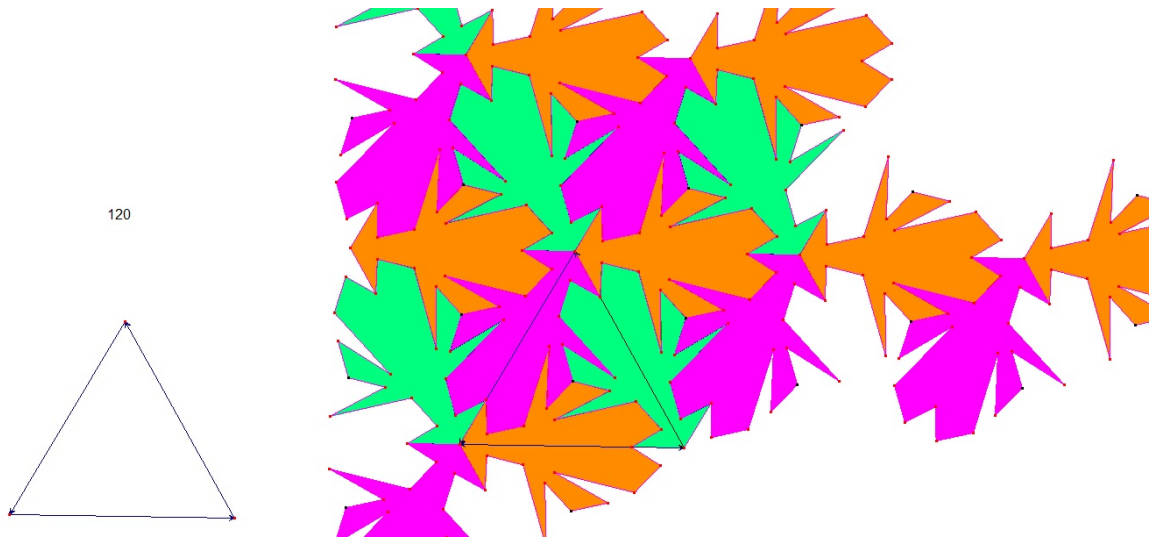
ببرها، نمونه طبیعی تقارن

شکل ۱۱.۲: تقارن

۳.۱۰.۲ تبدیل

تبدیل به دانش‌آموزان اجازه می‌دهد تا مفاهیم گسترده‌ی تناسب و تشابه را گسترش دهند و آن‌ها را در رابطه با همه‌ی اشکال به کار ببرند. به عنوان مثال، اشکال متجانس به وسیله‌ی بازتاب، دوران، لغزش به هم مرتبط می‌شوند. دانش‌آموزان با مطالعه‌ی تبدیل‌ها می‌توانند این حقایق را بفهمند که عکس‌ها اشیاء هندسی هستند، همه‌ی سهمی‌ها متشابه‌اند، زیرا می‌توانند روی هم نگاشته شوند،

نمودارهای $y = \sin(x)$ و $y = \cos(x)$ متجانس هستند و ماتریس‌ها کاربردهای قدرتمندی در هندسه دارند و از این قبیل. تبدیل‌ها همچنین در فعالیت هنری فرهنگ‌های مختلف، نقشی اساسی ایفا می‌کنند. برای مثال، تبدیل‌ها در طرح‌های سفالگری، کاشی‌کاری و حاشیه‌آرایی ظاهر می‌شوند.



شکل ۱۲.۲: تبدیلات هندسی با استفاده از نرم‌افزار

فصل ۳

ارتباط هندسه و جبر

۱.۳ مقدمه

این بخش می‌توانست ارتباط جبر و هندسه نامیده شود، زیرا که در ترتیب الفبایی (هم در زبان انگلیسی و هم در زبان فارسی)، جبر قبل از هندسه قرار می‌گیرد. اما دلایلی وجود دارد که نشان می‌دهد عنوان حاضر بهتر می‌باشد، و همین امر توجه را به هندسه (بیشتر از افزایش تمایل برای حکمفرما بودن جبر بر برنامه‌ی آموزشی ریاضیات مدرسه) جلب می‌کند. همانطور که در فصل قبل بیان کردیم، هندسه می‌تواند بینشی به سمت جنبه‌های دیگر ریاضیات ایجاد کند و در نتیجه نشان می‌دهد که چگونه گسترش تکنولوژی‌های عددی باعث ایجاد یک تجدید حیات در علاقه‌مندی به هندسه و نیز در ظهور تکنیک‌هایی برای ریاضیات تجسمی شده است (جونز^۱، ۲۰۰۰، ۲۰۰۲). با وجود این دلایل و نیز دلایل بیشتر، تمرکز این پایان‌نامه بر پیوند هندسه و جبر و چگونگی برقراری این پیوند است و نیز به واسطه‌ی این پیوند، این امکان وجود دارد که برنامه‌ی آموزشی ریاضیات (و بنابراین تجربه‌ی یاددهی و یادگیری) تقویت شود.

^۱Jones

۲.۳ ارتباط بین هندسه و جبر در برنامه‌ی آموزشی ریاضیات مدرسه

در بسیاری از موارد جبر می‌تواند بر برنامه‌ی آموزشی ریاضیات مدرسه حکمفرما باشد. به عنوان مثال، فعالیت گروه مشورتی ریاضیات ملی آمریکا^۲، که بر آماده‌سازی دانش‌آموزان به منظور موفقیت در جبر تمرکز کرده بود (گروه مشورتی ریاضیات ملی آمریکا، ۲۰۰۸، صفحه‌ی ۸). توجه به سخنان افرادی مانند بل، کاکستر و اتیا با ارزش است (ریاضیدانان مشهور *ABC*)^۳. ریاضیدان مشهور، کاکستر^۴، در پاسخ به این که چه چیزی تدریس ریاضیات در سطح دبیرستان یا در سطح دانشگاه را بهبود می‌بخشد، بیان کرد: «من فکر می‌کنم که با کمی محتاط بودن، شاید بتوانیم میزان یکسانی از ریاضیات و جبر خطی را در زمان کمتر تدریس کنیم و زمان بیشتری برای هندسه‌ی مطلوب داشته باشیم» (نقل از کاکستر در لگاتتی^۵ و کاکستر، ۱۹۸۰). ریاضیدانی به نام اریک تمپل بل^۶ اشاره می‌کند که: «با نوشته‌های وسیع‌تری از جبر و علم حساب ترکیب شده و حداقل به گستردگی آنالیز، هندسه یک جایگاه غنی از چیزهای جالب‌تر و نیمه فراموش شده‌ای است که نسل شتاب‌زده‌ی امروز فرصتی برای لذت بردن از آن در مقایسه با قسمت‌های دیگر از ریاضیات را ندارند» (نقل از بل در کاکستر و گریترز^۷، ۱۹۶۷، صفحه‌ی ۱).

در یک سخنرانی جامع در نشست جهانی ریاضی در سال ۲۰۰۰ میلادی (تورنتو، کانادا، ۹-۷ ژوئن، ۲۰۰۰)، ریاضیدان مشهور، مایکل اتیا^۸، عنوان کرد: «بینش فضایی یا ادراک فضایی، یک ابزار بسیار قدرتمند است که بیان می‌کند، چرا هندسه واقعاً به عنوان یک بخش قدرتمند از ریاضیات است، نه تنها برای چیزهایی که به طور آشکار هندسی هستند، حتی برای چیزهایی که این گونه نیستند، و ما سعی می‌کنیم آن‌ها را به فرم هندسی در بیاوریم، زیرا این کار ما را توانمند می‌کند که بینش خود را به کار بگیریم، چرا که بینش ما قدرتمندترین ابزار ماست» (اتیا، ۲۰۰۱).

در تاریخ ریاضیات به نظر می‌رسد تا اندازه‌ای ارتباط ساده‌ای بین هندسه و جبر وجود نداشته باشد

^۲U.S. National Mathematics Advisory Panel

^۳Atiyah, Bell, Coxeter

^۴Coxeter

^۵Logothetti

^۶Eric Tappel Bell

^۷Greitzer

^۸Michael Atiyah

(اتیا، ۲۰۰۱، چاربونو، ۱۹۹۶، جیاگویتو، ۲۰۰۷، کاواسز، ۲۰۰۵)^۹. بر طبق عقیده‌ی اتیا (۲۰۰۱)، چیزی که اساساً می‌تواند یک دوگانگی به نظر برسد این است که: «جبر با دستکاری (با فرمول‌ها و روابط) مرتبط است و هندسه با فضا. این دو، دو جنبه متعامد از دنیا هستند و دو دیدگاه متفاوت در ریاضیات را ارائه می‌کنند. بنابراین بحث و گفتگو بین ریاضیدانان در گذشته درباره‌ی اهمیت هندسه و جبر، چیزی بسیار اساسی را بیان می‌کند». در حالی که جبر تکنیک‌های قدرتمندی برای ریاضیات فراهم می‌کند، اتیا خطری را می‌بیند که: «زمانی که شما فقط به محاسبات جبری اهمیت می‌دهید، اساساً تفکر را متوقف می‌کنید، تفکر به طور هندسی را متوقف می‌کنید، شما تفکر در رابطه با مفهوم را متوقف می‌کنید». در قسمت بعد، به تشریح این دیدگاه پرداخته و امکان ارتباط بین جبر و هندسه در عین وجود دوگانگی بین آن‌ها را بیان می‌کنیم.

این‌ها دلایلی برای متمرکز شدن بر پیوند جبر و هندسه می‌باشد و نیز بیان می‌کند که تفکر هندسی نقش مهمی در ریاضیات دارد و یاددهی و یادگیری ریاضیات از طریق یافتن راه‌هایی برای ایجاد بینش فضایی و ادراک فضایی دانش‌آموزان، می‌تواند تقویت شود. توجه به وضعیت برنامه‌ی آموزشی ریاضیات مدرسه در انگلستان که در فصل قبل هم بیان شد، در فهم بهتر این دلایل کمک می‌کند.

۳.۳ هندسه در مقابل جبر

یک دوگانگی در ریاضیات که همیشه، از گذشته تا آینده با ما خواهد بود و ما را به تفکر و بیان تذکراتی وادار می‌کند، دوگانگی بین هندسه و جبر می‌باشد. هندسه و جبر دو پایه‌ی رسمی ریاضیات هستند و هر دوی آن‌ها بسیار قدیمی هستند. هندسه به یونانیان و قبل از آن‌ها برمی‌گردد و جبر به اعراب و هندیان برمی‌گردد. پس هر دو در ریاضیات، اساسی و قدیمی هستند، اما به نظر می‌رسد که برقراری ارتباط بین آن‌ها کار آسانی نیست. از نظر تاریخی می‌توانیم بگوییم که هندسه‌ی اقلیدسی بهترین مثال از اصول نظری ریاضی است و تا معرفی مختصات جبری به وسیله‌ی دکارت در آن چه اکنون آن را صفحه‌ی مختصات می‌نامیم، مطلقاً هندسی بود. کار دکارت تلاشی بود برای کم کردن

^۹Charbonneau, Giaquinto, Kvasz

تفکر هندسی و افزایش کار جبری. البته این یک حمله‌ی بزرگ به هندسه از طرف جبردانان بود. اگر کار نیوتن و لایبنیتز در آنالیز را با هم مقایسه کنیم، متوجه می‌شویم که آن‌ها دو عقیده‌ی کاملاً متفاوت داشتند. نیوتن اساساً یک هندسه‌دان بود و لایبنیتز یک جبردان، و هر دو از جمله دانشمندان برجسته بودند. گسترش هندسه یا ریاضیات توسط نیوتن، تلاشی ریاضی‌وار برای توصیف قوانین طبیعت بود. عقیده‌ی او در یک معنی و مفهوم گسترده با فیزیک در ارتباط بود و باید بدانیم که فیزیک در دنیای هندسه نمود پیدا می‌کند. اگر بخواهیم بدانیم که اشیاء چگونه کار می‌کنند، در واقع در دنیای فیزیکی و به آن زبان تفکر می‌کنیم، به زبان تصاویر هندسی فکر می‌کنیم. نیوتن می‌خواست ریاضیات را به گونه‌ای گسترش دهد که تا حد امکان به زمینه‌ی فیزیکی که در پشت آن است، نزدیک باشد. او برای این منظور بحث‌های هندسی را به کار برد، زیرا با این کار به معنی و مفهومی که مدنظرش بود، نزدیک می‌شد. در طرف دیگر، لایبنیتز دارای هدفی بلند و جاه‌طلبانه بود، به گونه‌ای که هدف او فرموله کردن تمام ریاضیات و تبدیل آن به یک ماشین بزرگ جبری بود. این رویکرد لایبنیتز به طور کامل مخالف با رویکرد نیوتن بود. آن دو همچنین نمادگذاری‌های بسیار متفاوتی به کار بردند. همانطور که می‌دانیم، در مباحثه‌ی بزرگ بین نیوتن و لایبنیتز، نمادگذاری لایبنیتز پیروز شد. ما در نوشتن مشتق از لایبنیتز پیروی می‌کنیم. نمادگذاری نیوتن پا برجاست، اما برای مدت زمانی طولانی از نظر پوشیده شد.

در اواخر قرن نوزدهم، در حدود یکصد سال پیش، دو شخصیت بزرگ به نام‌های پوانکاره^{۱۰} و هیلبرت^{۱۱} حضور داشتند. تا حدی می‌توانیم بگوییم که آن دو به ترتیب طرفداران نیوتن و لایبنیتز بودند. پوانکاره بیشتر در مفهوم هندسه و توپولوژی تفکر می‌کرد و آن افکار، بینش اساسی او را شکل می‌داد. هیلبرت بیشتر فرمول‌نویس بود. کار او بر پایه‌ی ایجاد اصول موضوعه، فرمول‌بندی کردن و ارائه‌ی نمایش‌هایی رسمی و بسیار دقیق بود. پس آنان هم دو عقیده‌ی کاملاً متفاوت داشتند. در این جا مناسب است که اسامی دانشمندان کنونی که این عقاید را دنبال می‌کنند، ذکر کنیم. چه کسی را باید نام برد؟ چه کسی ممکن است در این لیست مشهور قرار بگیرد؟ دو نفر را می‌توان ذکر کرد: آرنولد به عنوان دنباله‌روی عقیده‌ی پوانکاره - نیوتن و بورباکی^{۱۲}، شاید مشهورترین طرفدار

^{۱۰} Poincare^{۱۱} Hilbert^{۱۲} Bourbaki

دیوید هیلبرت. بدون شک دیدگاه آرنولد درباره‌ی ماشین و در واقع درباره‌ی فیزیک، اساساً هندسی است و پیرو عقیده‌ی نیوتن است. در سوی دیگر بورباکی تلاش کرد که برنامه‌ی رسمی هیلبرت که درباره‌ی اصل موضوع‌سازی و فرموله‌کردن ریاضیات بود، را به سمت یک حوزه‌ی مورد توجه و تا اندازه‌ای موفقیت‌آمیز ادامه دهد. دیدگاه‌های مختلف، ویژگی‌ها و مزایای مختص به خود را دارند و همواره بین آن‌ها کشمکش وجود دارد.

حال به شرح بیشتر دیدگاه اتیا در تفاوت بین هندسه و جبر می‌پردازیم: هندسه، درباره‌ی فضا است و از این نظر سؤالی نیست. اگر به افراد حاضر در یک اتاق نگاه کنیم، می‌توانیم چیزهای بسیاری ببینیم. در یک ثانیه یا حتی یک میکرو ثانیه، می‌توانیم اطلاعات وسیعی به دست آوریم و این به دیدن مربوط می‌شود و البته تصادف نیست. مغز ما به گونه‌ای ساخته شده که به طور وسیعی با دیدن (بینایی) درگیر است. بینایی چیزی حدود ۸۰ یا ۹۰ درصد از پوسته‌ی مغز را به کار می‌گیرد (با توجه به سخن کسانی که در عصب‌شناسی کار می‌کنند). حدود ۱۷ مرکز مختلف در مغز وجود دارد و هر کدام به بخش متفاوتی از فرآیند دیدن اختصاص یافته است. بعضی قسمت‌ها برای دیدن به صورت عمودی به کار گرفته می‌شوند، بعضی قسمت‌ها برای دیدن به صورت افقی. بعضی قسمت‌ها برای تشخیص و دیدن رنگ‌ها، مناظر و نهایتاً بعضی قسمت‌ها به مفهوم و تفسیر مربوط می‌شود. فهمیدن و درک کردن جهانی که می‌بینیم، یک بخش خیلی مهم از تکامل تدریجی ماست. بنابراین شهود فضایی یا درک فضایی، یک ابزار بسیار قدرتمند است و این بیان می‌کند که چرا هندسه در واقع چنین قسمت قدرتمندی از ریاضیات است، نه تنها برای چیزهایی که به طور واضح هندسی هستند، بلکه برای چیزهایی که هندسی نیستند. ما سعی می‌کنیم آن‌ها را به فرم هندسی در بیاوریم، زیرا این کار ما را قادر می‌سازد تا از شهودمان که قدرتمندترین ابزار ماست، استفاده کنیم. این کاملاً واضح است که اگر تلاش کنید مطلبی ریاضی را برای یک دانش‌آموز یا همکار شرح دهید، نیاز به بحث و زمان دارید و در نهایت وقتی دانش‌آموز می‌فهمد، می‌گوید: «*I see*»، دیدن، مترادف فهمیدن است و کلمه‌ی درک را به عنوان مترادف دیدن و فهمیدن در زبان انگلیسی به کار می‌بریم. شاید جالب باشد که این موضوع را در زبان‌های دیگر هم بررسی کنیم. یادآوری این موضوع خیلی مهم و اساسی است که ذهن بشر چنین گنجایش عظیمی برای جذب مقدار وسیعی از اطلاعات دارد، که به وسیله‌ی عمل دیدن، حتی در یک لحظه صورت می‌گیرد و ریاضیات به این

موضوع توجه کرده و آن را تکمیل می‌کند.

در طرف دیگر جبر (و شما ممکن است درباره‌ی جبر این گونه فکر نکنید)، اساساً با زمان مرتبط است. جبری که مطالعه می‌کنیم، یک دنباله از عملیات است که یکی پس از دیگری انجام می‌شود. و «یکی پس از دیگری» یعنی باید زمان بیشتری داشته باشیم. جبر را نمی‌توانیم در جهانی ایستا تصور کنیم، اما هندسه اساساً ساکن (ایستا) است. می‌توانیم فقط جایی بنشینیم و ببینیم و شاید چیزی تغییر نکند. اما جبر با زمان درگیر است، چرا که باید عملیاتی به صورت دنباله‌ای انجام شود و وقتی که می‌گوییم «جبر»، منظورمان فقط جبر مدرن نیست. هر الگوریتم و هر روند محاسباتی، یک دنباله از مراحل است که پشت سر هم انجام می‌شوند. کامپیوتر، مثالی آشکار از انجام عملیات‌های گوناگون است. کامپیوتر، اطلاعات را به یک رشته از صفرها و یک‌ها می‌برد و پاسخ را ارائه می‌دهد. جبر با دستکاری و انجام عملیات در زمان معین مرتبط است و هندسه با فضا ارتباط دارد. این‌ها دو جنبه‌ی متعامد از دنیا هستند و دو دیدگاه متفاوت از ریاضیات را ارائه می‌کنند. بنابراین مباحثه و گفتگو بین ریاضیدانان در گذشته همواره بوده، البته این بدین معنی نیست که در مباحثه یکی برنده و دیگری بازنده می‌شود. در مقایسه‌ی دیگر می‌توان گفت: «آیا باید فقط یک هندسه‌دان بود یا فقط یک جبردان؟»، مانند این است که بگوییم «آیا بهتر است کر باشیم یا نابینا؟». اگر نابینا باشیم فضا (هندسه) را نمی‌بینیم. اگر کر باشیم، نمی‌شنویم و شنیدن در زمان (جبر) اتفاق می‌افتد. حال آن که ما ترجیح می‌دهیم هر دو قوه را داشته باشیم.

در فیزیک بخش قابل مقایسه و تقریباً مشابه به آن چه تاکنون بیان کردیم، بین مفاهیم و تجربه‌ها (آزمایش‌ها) وجود دارد. فیزیک دو قسمت دارد: قضیه‌ها - مفاهیم، معانی، تعاریف، قوانین - و دستگاه آزمایشی. به نظر می‌رسد که مفاهیم تا حد زیادی هندسی هستند، زیرا با چیزهایی در ارتباط هستند که در دنیای واقعی اتفاق می‌افتد. از طرف دیگر، تجربه یا آزمایش، بیشتر شبیه محاسبات جبری می‌باشد. ما کاری را در یک زمان معین انجام می‌دهیم، مثلاً تعدادی اندازه‌گیری انجام می‌دهیم، اندازه‌گیری‌ها را در فرمول قرار می‌دهیم. اما مفاهیم پایه‌ای که در پس زمینه‌ی آزمایش‌ها هستند، بخشی از عقیده‌ی هندسی هستند. برای بررسی این دوگانگی در چارچوبی فلسفی می‌توان گفت جبر به ریاضی‌دانان می‌گوید: من به شما ماشین قدرتمندی می‌دهم که این ماشین هر سؤالی که دارید، پاسخ می‌دهد. در مقابل شما باید روح خود (هندسه) را به من بدهید، از هندسه دست

بکشید تا این ماشین حیرت‌آور، عجیب و جالب (جبر) را داشته باشید (امروزه می‌توانیم درباره‌ی کامپیوتر این گونه فکر کنیم). البته علاقه‌مندیم هم ماشین جبری را داشته باشیم و هم هندسه را. شاید بتوانیم وانمود کنیم که حاضر به معامله هستیم، ولی روح خود را نبخشیم و از دست ندهیم. اما با قبول این خطر که وقتی فقط به محاسبه‌ی جبری اهمیت می‌دهیم، اساساً تفکر و تفکر هندسی را متوقف می‌کنیم، تفکر درباره معنی را متوقف می‌کنیم. شاید این گونه سخن گفتن درباره‌ی جبر، کمی سخت گیرانه باشد. اما اساساً هدف جبر همیشه تولید فرمولی بوده، که شخص بتواند آن را در دستگاه قرار دهد و آن را کنترل کرده و جواب را بگیرد. در حقیقت، چیزی که دارای معنی و مفهوم بوده، به فرمول تبدیل می‌شود و پاسخ به دست می‌آید. در این روند به این که چگونه و در چه مراحل جبر با هندسه ارتباط برقرار می‌کند، توجهی نمی‌شود و نیازی به فکر کردن در این باره هم نیست. بینش فراموش می‌شود و این درست نیست. مرزبندی بین هندسه و جبر، آسان و ساده نیست. انتخاب بین هندسه و جبر، پیوند بین آن‌ها را رهنمون می‌شود. شاید ساده‌ترین شکل ارتباط هندسه و جبر، این باشد که جبردانان غالباً از نمودارها استفاده می‌کنند، و نمودار چیزی جز یک شهود هندسی نیست. بنابراین هندسه و جبر این چنین به هم وابسته بوده و یکدیگر را کامل می‌کنند. در قسمت بعد، راه‌هایی برای ایجاد ارتباط بین هندسه و جبر بیان می‌کنیم، ارتباطی که شایسته است در برنامه‌ی آموزشی مدرسه بیشتر به آن توجه شود. آن چنان که دانش‌آموزان از قبل از ورود به دانشگاه، آمادگی و توانایی بهتری در ارتباط بین مفاهیم مختلف ریاضی، به ویژه در زمینه‌ی پیوند جبر و هندسه به دست آورند.

۴.۳ ایجاد ارتباط بین مفاهیم مختلف ریاضی - در زمینه‌ی هندسه

و جبر

بسیاری از کشورها در جستجوی راه‌هایی برای تشویق دانش‌آموزان بیشتر به کسب مهارت در علوم، تکنولوژی، مهندسی و ریاضیات هستند. از این رو، در برنامه‌ی آموزشی بعضی از مدارس، فعالیت‌هایی بر پایه‌ی ICT و در قالب پروژه‌هایی انجام می‌شود که به مهیج کردن ریاضی در بین

دانش‌آموزان و حتی معلمان کمک می‌کند. آن‌ها از این طریق می‌توانند بین موضوعات مختلف در دنیای واقعی و دنیای ریاضی ارتباط برقرار کرده و در نهایت با پیوندهای درونی ریاضیات، بیشتر آشنا شوند. این فعالیت‌ها شامل استفاده از تصاویر دیجیتالی، نرم‌افزارهای ریاضی و به خصوص هندسی، به منظور مدل‌سازی توسط هندسه‌ی دوبعدی و جبر و همچنین استفاده از نرم‌افزار هندسه‌ی سه‌بعدی به منظور توسعه‌ی تجسم و مدل‌سازی در فضا می‌باشند.

در ادامه، با توجه به فعالیت‌های مذکور، راه‌های پیوند هندسه و جبر در برنامه‌ی آموزشی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۴.۳ یک دیدگاه در پیوند هندسه و جبر

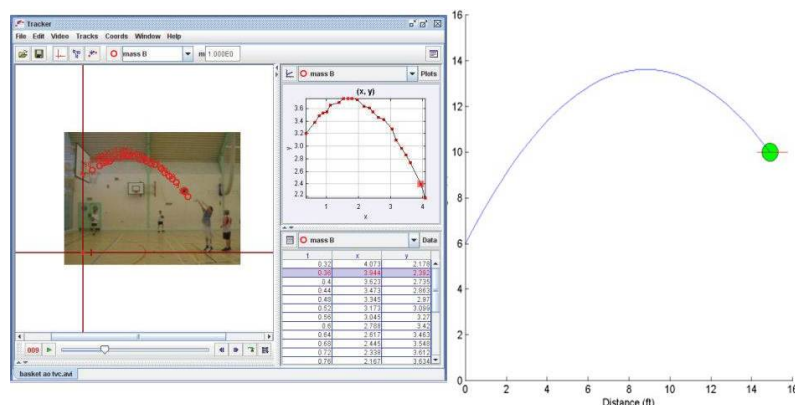
بنا به گزارش QCA در زمینه‌ی جبر و هندسه (صلاحیت‌ها و قدرت برنامه‌ی آموزشی^{۱۳}، ۲۰۰۴)، یکی از راه‌های پیوند هندسه و جبر، به کار بردن نرم‌افزار هندسه‌ی پویا به منظور ایجاد راه‌های نو و بدیع تجسم روابط جبری می‌باشد. یکی از نرم‌افزارهای پر کاربرد در هندسه‌ی پویا، جئوجبرا^{۱۴} (هندسه و جبر) می‌باشد، که یک نرم‌افزار ترکیب‌کننده‌ی هندسه، جبر و حساب دیفرانسیل و انتگرال و نمونه‌ای از نمایش‌های آن‌هاست (هوهن وارتر، جونز، ۲۰۰۷)^{۱۵}. جئوجبرا یکی از نرم‌افزارهای کدباز ریاضی می‌باشد که اخیراً طراحی شده و در مؤسسه‌ی ملی دانشگاه کمبریج توسعه یافته است.

یک مثال در استفاده از نرم‌افزار، فعالیت معلمان در مدرسه‌ی Hampshire (در انگلستان) بر روی پروژه‌ای بود که دانش‌آموزان به کمک نرم‌افزار هندسه‌ی پویا، نمودار توابع درجه دوم مربوط به مسیر پرتاب توپ بسکتبال را ترسیم کردند. معلمان از این طریق دانش‌آموزان را با تجربه‌های جدیدی آشنا می‌کنند. آن‌ها می‌توانند در محیط نرم‌افزار و در ترسیم‌های مختلف، چگونگی تأثیر ضرایب جبری متفاوت بر شکل نمودار را مشاهده کنند (شکل ۱.۳). مثال‌های تصویری متعددی را می‌توان برای بیان قابلیت هندسه‌ی پویا و تجسم روابط جبری به کار برد (شکل ۲.۳ و شکل ۳.۳ را ببینید).

^{۱۳}Qualification and Curriculum Authority

^{۱۴}GeoGebra

^{۱۵}Hohenwarter, Jones



شکل ۱.۳: نمودار تابع درجه دوم مسیر پرتاب توپ بسکتبال

۲.۴.۳ جنو جبرا در انگیزش آموزش ریاضی و تولید مسائل

برخی برنامه‌های درسی نوین در دبیرستان‌ها مطابق با برنامه‌ی درسی ملی، دانش‌آموز را برای فهم بهتر ریاضیات آماده می‌کند. بر طبق [kop97]، بسیاری از آموزگاران، اهداف اصلی آموزش ریاضی را به این صورت بیان می‌کنند:

- ۱- توسعه‌ی تفکر منطقی؛
- ۲- توسعه‌ی توانایی حل مسأله؛
- ۳- توسعه‌ی تفکر خلاق؛
- ۴- توسعه‌ی فعالیت‌های فردی به طور مستقل.

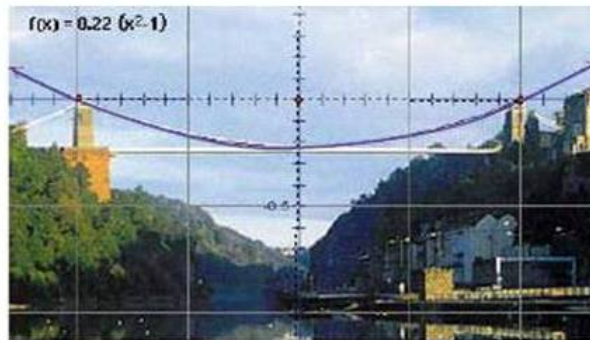
فرآیند کسب دانش:

فرآیند کسب دانش در آموزش ریاضیات توسط هینی^{۱۶} و لیتلر^{۱۷} ([HL06])، بر پایه‌ی مراحل معینی بیان شده است. با انگیزش شروع می‌شود و هسته‌های آن عبارتند از:

- ۱- گذار از دانش پیوسته به دانش کلی؛
- ۲- گذار از دانش عمومی به دانش مجرد.

^{۱۶}Hejny

^{۱۷}Littler



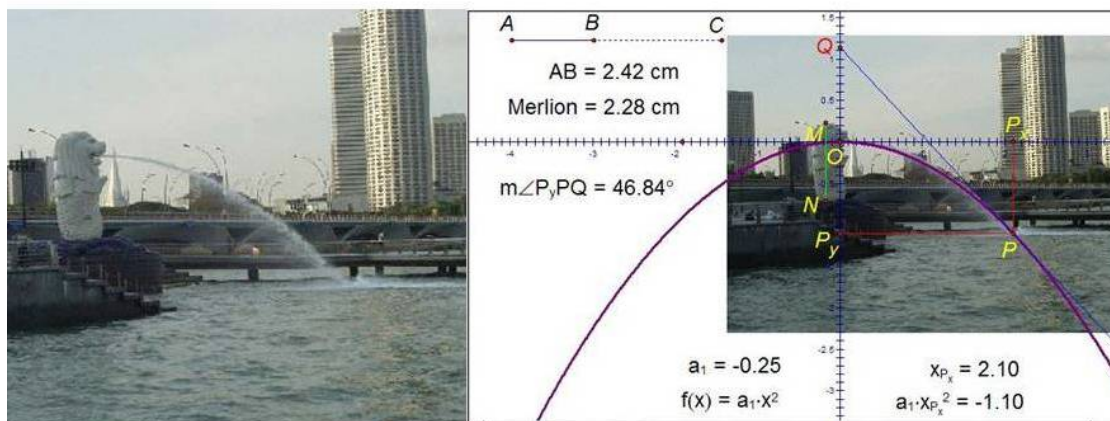
پل کلیفتون، بریستول

شکل ۲.۳: قابلیت هندسه‌ی پویا و تجسم روابط جبری

اما بخش ثابت فرآیند کسب دانش، تبلور به معنی قرار دادن دانش جدید در ساختار ریاضی موجود است. تبلور شامل دستکاری توابع پیوسته و حتی توابعی که پیوسته نیستند و شکل‌های مشکل‌تری دارند، می‌باشد.

روش به وجود آوردن و تولید مسائل (GP)

امروزه فرآیند تولید مسئله، بخش مهمی از برنامه‌های آموزشی ریاضیات است. آموزش دانش‌آموزان و فعالیت‌های آن‌ها باید به عنوان فاکتورهای مکمل در فرآیند یادگیری مد نظر قرار بگیرند. اما در این جا مقصود ما ساختن مسائلی است که در آن دانش‌آموزان با کاربرد نتیجه‌ی آموزشی آن مسئله، به طور مستقل بتوانند فعالیت‌های خود را توسعه دهند. در واقع دانش‌آموز شروع به حل مسئله می‌کند و ممکن است همکاری یا کمک به اندازه‌ی ضرورت بخواهد. بدین طریق می‌تواند پایه‌ای برای کار بیشتر و حل مسائل دیگر به دست آورد. بعد از این که مسئله به طور کامل حل شد، معلم همراه با دانش‌آموز درباره‌ی سؤالات بیشتر فکر می‌کنند و مسائلی را به وجود می‌آورند که با مسئله‌ی قبل مرتبط می‌باشند. بنابراین مسئله‌ی اصلی به عنوان یک تولید کننده‌ی مسئله عمل می‌کند و ما آن را *Generator Problem* یا مولد مسئله و به طور اختصار *GP* می‌نامیم. مسائل مرتبط و جدید به



قواره اژدها، سنگاپور

شکل ۳.۳: قابلیت هندسه‌ی پویا و تجسم روابط جبری

وسیله‌ی قیاس، تغییر پذیری، تعمیم و غیره به دست می‌آیند. مجموعه‌ی مسائل جدید با هم، همراه GP یا مولد آن‌ها را مجموعه‌ی مسائل بوجود آمده از GP یا قلمرو مسأله GP می‌نامیم. روش تولید مسائل را به وسیله‌ی مثال به تصویر می‌کشیم. معادله‌ی $f(x) = f^{-1}(x)$ را که در آن f یک تابع و f^{-1} وارون آن می‌باشد را در نظر می‌گیریم. حل چنین معادله‌ای به دانش‌آموز دبیرستانی کمک می‌کند که از طریق موضوعات و فعالیت‌های عددی مختلف، به فهم و درک بهتری نسبت به مفاهیم و ویژگی‌های توابع، توابع معکوس، معادلات پارامتری و از این قبیل دست یابد. همچنین برنامه‌ها و نرم‌افزارهای مختلف کامپیوتری همانند *GeoGebra* که در رسم نمودار توابع به کار گرفته می‌شوند، می‌توانند به طور مؤثری در چنین فعالیت‌هایی مورد استفاده قرار بگیرند و به دانش‌آموزان در برقراری ارتباط بین مفاهیم مختلف ریاضی و همچنین تولید مسائل جدید کمک کنند.

توابع گویا به فرم $f(x) = \frac{ux+v}{px+r}$ ، (که در آن $x \neq -\frac{r}{p}$ برای $p, r, u, v \in \mathbb{R}$) را می‌توان به صورت $f(x) = a + \frac{k}{x-b}$ ، که $x \neq b$ و $(a, b, k \in \mathbb{R})$ نمایش داد. برای این تابع معادله‌ی $f(x) = f^{-1}(x)$ برای $a \neq 0$ و $b \neq 0$ به فرم $a + \frac{k}{x-b} = b + \frac{k}{x-a}$ می‌باشد. اگر این معادله را حل کنیم، داریم:

$$a(x-a)(x-b) + k(x-a) = b(x-a)(x-b) + k(x-b)$$

$$(a-b)(x-a)(x-b) + k(b-a) = 0 \Rightarrow (a-b)[(x-a)(x-b) - k] = 0$$

حال دو حالت داریم:

۱- اگر $a = b$ باشد، $0 = 0$ و جواب، مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی است.

۲- اگر $a \neq b$ باشد داریم:

$$(x-a)(x-b) - k = 0 \Rightarrow x^2 + (-a-b)x + (ab-k) = 0 \quad (1)$$

و داریم:

$$x_{1,2} = \frac{a+b \pm \sqrt{(a-b)^2 - 4k}}{2}$$

اکنون سه حالت پیش می‌آید:

۱- اگر $k > -\frac{1}{4}(a-b)^2$ باشد معادله‌ی (۱) دو جواب دارد:

$$x_1 = \frac{a+b + \sqrt{(a-b)^2 - 4k}}{2} \quad x_2 = \frac{a+b - \sqrt{(a-b)^2 - 4k}}{2}$$

توجه کنید که $(a-b)^2 > 0$ و برای هر عدد مثبت k معادله‌ی (۱) دو جواب دارد.

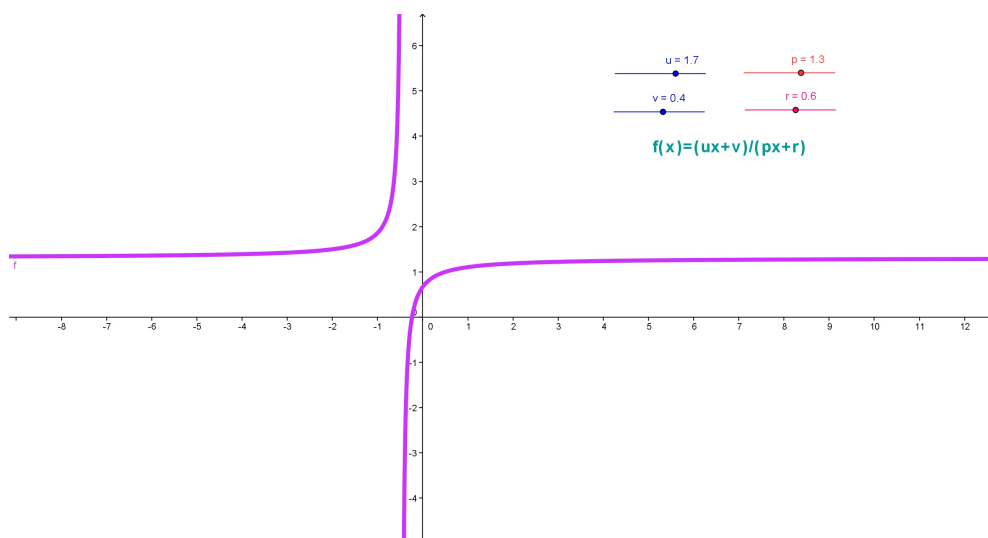
۲- اگر $k = -\frac{1}{4}(a-b)^2$ تنها جواب معادله $x = \frac{1}{2}(a+b)$ می‌باشد.

۳- اگر $k < -\frac{1}{4}(a-b)^2$ آن گاه معادله جواب ندارد (شکل ۴.۳).

جواب‌ها تفسیر هندسی دارند. نمودارهای توابع f و f^{-1} هذلولی هستند. سؤال این است که این هذلولی‌ها چه تعداد نقطه‌ی مشترک دارند؟

در حالت $a = b$ ، هذلولی یعنی نمودار تابع f ، نسبت به خط $y = x$ متقارن است. بنابراین جواب معادله‌ی (۱) تمام اعداد حقیقی است.

در حالت $a \neq b$ سه حالت ممکن وجود دارد:



شکل ۴.۳: شکل هذلولی

۱- هذلولی‌ها دو نقطه‌ی مشترک دارند، برای هر مقدار مثبت k هذلولی، یعنی نمودار تابع f ، دو نقطه‌ی اشتراک با خط $y = x$ دارد و این نقاط، نقاط اشتراک هذلولی دیگر، یعنی نمودار f^{-1} ، نیز هستند.

۲- یک شاخه‌ی هذلولی f به یک شاخه‌ی هذلولی f^{-1} می‌رسد و مماس مشترک $y = x$ را در نقطه‌ی اشتراک دارند. به عنوان مثال تابع $f(x) = 3 - \frac{1}{x-1}$ را برای این حالت می‌توانیم رسم کنیم.

۳- هذلولی‌ها هیچ نقطه‌ی اشتراکی ندارند.

تابع درجه دوم به فرم $x^2 + a$: معادله‌ی $f(x) = f^{-1}(x)$ برای تابع درجه دوم $x^2 + a$ که $x \geq 0$ و a یک پارامتر حقیقی است، به صورت $x^2 + a = \sqrt{x-a}$ می‌باشد. اگر معادله را حل کنیم، خواهیم داشت:

$$x^4 + 2ax^2 + a^2 = x - a \Rightarrow x^4 + 2ax^2 - x + a^2 + a = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 x^4 + 2ax^2 + x^2 - x^2 - x + a^2 + a &= 0 \Rightarrow x^4 + (2a+1)x^2 - x + a^2 + a = 0 \Rightarrow \\
 (x^2 + (a + \frac{1}{4}))^2 - (a + \frac{1}{4})^2 x^2 - x + a^2 + a &= 0 \Rightarrow (x^2 + (a + \frac{1}{4}))^2 (x + \frac{1}{4})^2 = 0 \\
 (x^2 + x + (a + 1))(x^2 - x + a) &= 0
 \end{aligned}$$

این بدین معنی است که $x^2 + x + (a + 1) = 0$ یا $x^2 - x + a = 0$. اگر این دو معادله‌ی درجه‌ی دوم را حل کنیم، آن گاه داریم:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(a+1)}}{2}, \quad x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}$$

همه‌ی جواب‌ها در مجموعه‌ی اعداد حقیقی قابل قبول نیستند. می‌توان نشان داد که جواب‌های ارائه شده در جدول درست می‌باشند (شکل ۴). همچنین می‌توان با نمایش هندسی معادله و با استفاده از جئوجبرا مسأله را بهتر فهمید.

$a \in (-\infty, 0)$	$x = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}$
$a \in (0, \frac{1}{4})$	$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}$
$a = \frac{1}{4}$	$x = \frac{1}{2}$
$a \in (\frac{1}{4}, +\infty)$	جواب ندارد

شکل ۴

مثال‌های قبل به خوبی نشان می‌دهند که چگونه امکان دارد جئوجبرا را در توسعه‌ی فرآیند کسب دانش ریاضی از طریق آموزش و همچنین روش تولید مسائل با مولد مسأله GP به کار بگیریم. همچنین با ایجاد ارتباط بین آنالیز ریاضی، جبر، هندسه‌ی تحلیلی و هندسه‌ی ترکیبی در مدرسه، می‌توانیم دانش‌آموزان را به ریاضیات علاقه‌مند کرده و همچنین امکان استفاده‌ی بیشتر از خلاقیت فردی را برای آن‌ها فراهم کنیم.

نکته‌ی مهم مجزا نبودن دانش ریاضی دانش‌آموزان است. یک معلم می‌تواند مفاهیم تابع معکوس و نمودارهای توابع مختلف را توضیح دهد و دانش‌آموزان می‌توانند به آسانی این مفهوم را ببینند که مثلاً f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ متقارن هستند. در این جا جئوجبرا می‌تواند به عنوان

ابزاری سودمند برای رسم نمودارها به کار رود. دانش‌آموزان همچنین می‌توانند با یافتن جواب‌های عددی معادله‌ی $f(x) = f^{-1}(x)$ برای توابع ریاضی دیگر (توابع مثلثاتی، نمایی، لگاریتمی و دیگر توابع)، این روش را توسعه دهند. روش تولید مسائل می‌تواند برای قسمت‌های دیگری از ریاضیات مدرسه مفید باشد (برای مشاهده‌ی کاربردهای بیشتر، $[Bil10]$ ، $[H+09]$ و $[Tka07]$ را ببینید).

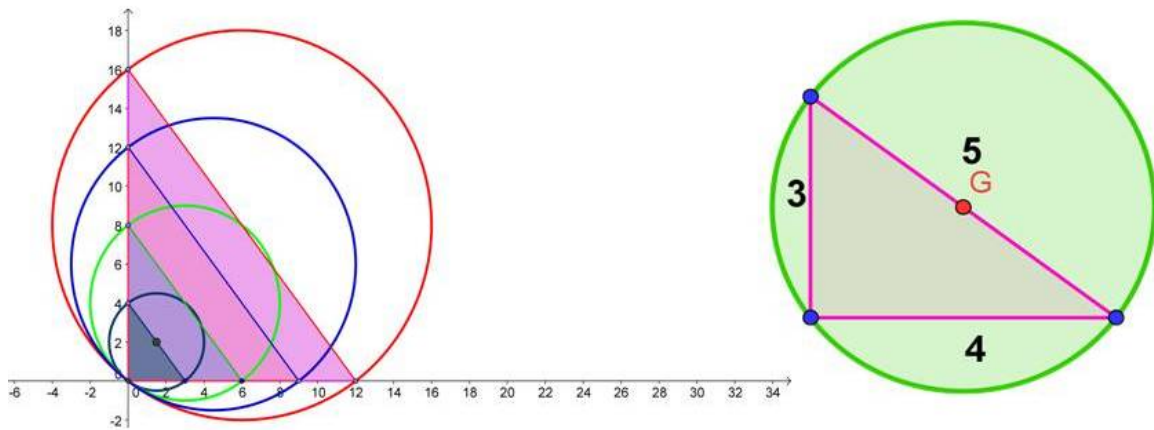
۳.۴.۳ دیدگاهی دیگر در پیوند هندسه و جبر

راه دیگر پیوند هندسه و جبر، استفاده از دیدگاه‌های مختلف برای درگیر شدن با یک مسأله است. برای شرح این مطلب، یکی از قدیمی‌ترین مسائل در نظریه‌ی اعداد را در نظر می‌گیریم: یافتن سه‌تایی فیثاغورس، سه‌تایی تمام اعداد (a, b, c) که در رابطه‌ی فیثاغورس صدق می‌کنند. اگر رابطه برقرار باشد، این فقط یک مسأله در نظریه‌ی اعداد است. اما اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه، مقادیری صحیح داشته باشند، نتایجی حاصل می‌شود که تنها از طریق شهود می‌توانیم به آن‌ها دست پیدا کنیم. برای درک بهتر این موضوع، همانند دیدگاه قبل، از هندسه‌ی پویا استفاده می‌کنیم. استفاده از هندسه‌ی پویا کمک می‌کند، که با رسم شکل و کشیدن رئوس برای ایجاد مثلث‌های مختلف، که اضلاع آن‌ها مقادیر صحیح هستند، به نتایجی برسیم که به کمک کمی جبر می‌توانیم آن نتایج را به طور دقیق اثبات کنیم.

یکی از دسته اشکال مرتبط با مثلث، دوایر می‌باشند، دوایر محیطی و دوایر محاطی داخلی و خارجی مثلث. همانطور که می‌دانیم مراکز این دوایر از طریق نیمساز زاویه‌ها مشخص می‌شوند. اما در این قسمت، می‌خواهیم به طور خاص به بررسی شعاع این دوایر بپردازیم.

در اولین مرحله، دایره‌ی محیطی این نوع خاص از مثلث قائم‌الزاویه را رسم می‌کنیم. آن چه که در ترسیمات مختلف مشاهده می‌کنیم این است که وتر مثلث قائم‌الزاویه، قطر دایره‌ی محیطی و در نتیجه شعاع دایره محیطی، همواره عددی گویا می‌شود و در بعضی حالات، عددی صحیح می‌شود که در ادامه توضیح بیشتری ارائه می‌دهیم.

در مرحله‌ی بعد، دوایر محاطی خارجی و داخلی چند مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع صحیح را رسم می‌کنیم. در این مرحله، آن چه به صورت شهودی استنباط می‌کنیم، این است که شعاع دوایر محاطی



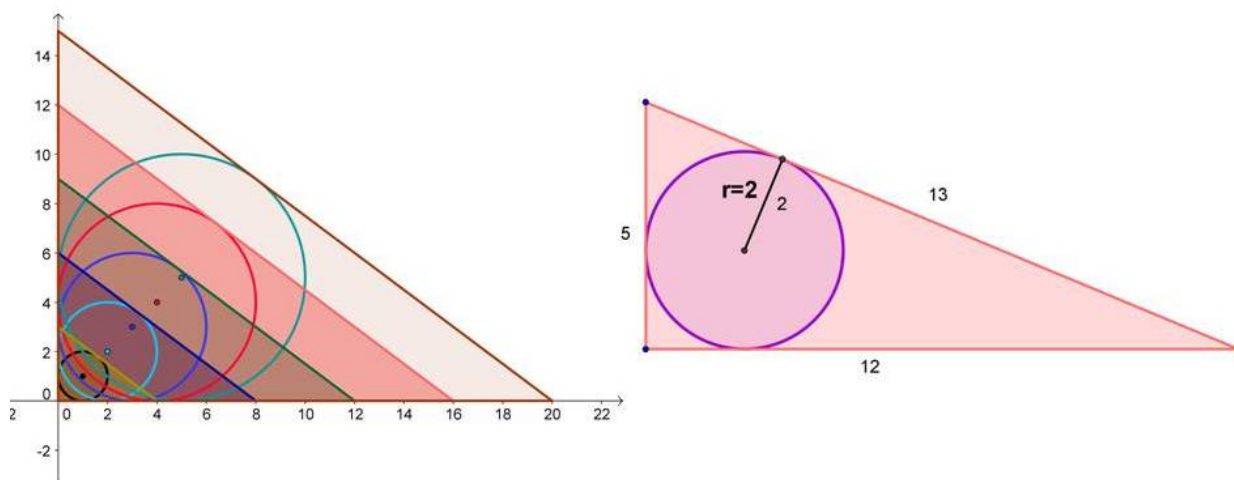
شکل ۵.۳: سه‌تایی‌های فیثاغورس و شعاع دوائر محیطی

داخلی و خارجی مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع صحیح، عددی صحیح خواهد بود، نتیجه‌ای که تنها از طریق رسم اشکال مختلف (و نه از طریق روابط و فرمول‌های خاص) به آن پی بردیم.

اکنون با استفاده از جبر به اثبات آن چه دیده‌ایم، می‌پردازیم. در مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع صحیح و با توجه به قضیه‌ی فیثاغورس خواهیم داشت: $x^2 + y^2 = z^2$ ، به طور بدیهی تمام جواب‌های حقیقی ناصفر معادله‌ی قبل با یافتن جواب‌های حقیقی معادله‌ی $X^2 + Y^2 = 1$ که $X = \frac{x}{z}$ و $Y = \frac{y}{z}$ معادل است. $X = \sin \alpha$ و $Y = \cos \alpha$ به ازای $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ تمام جواب‌های حقیقی

$$X = \frac{2 \tan(\frac{\alpha}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\alpha}{2})} \text{ و } Y = \frac{1 - \tan^2(\frac{\alpha}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\alpha}{2})} \text{ در نتیجه:}$$

معادله‌ی $X^2 + Y^2 = 1$ را به ما می‌دهد. با قرار دادن $t = \tan \frac{\alpha}{2}$ جواب‌ها به صورت $X = \frac{2t}{1+t^2}$ و $Y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ خواهند بود. برای جواب‌های گویای X و Y ، t باید گویا باشد. حال اگر قرار دهیم $t = \frac{a}{b}$ ، که a و b اعداد صحیح و $(a, b) = 1$ ، آن‌گاه تمام جواب‌های صحیح معادله‌ی $x^2 + y^2 = z^2$ به صورت $x = 2lab$ ، $y = l(a^2 - b^2)$ و $z = l(a^2 + b^2)$ می‌باشند. می‌توانیم از ضرب l برای ادامه‌ی کار صرفه‌نظر کنیم. چرا که هر جواب صحیح داده شده را با ضرب l می‌توان به یک جواب دیگر تبدیل کرد. پس کفایت که این جواب‌ها را در نظر بگیریم: $x = 2ab$ و $y = a^2 - b^2$ و $z = a^2 + b^2$ که $(a, b) = 1$.



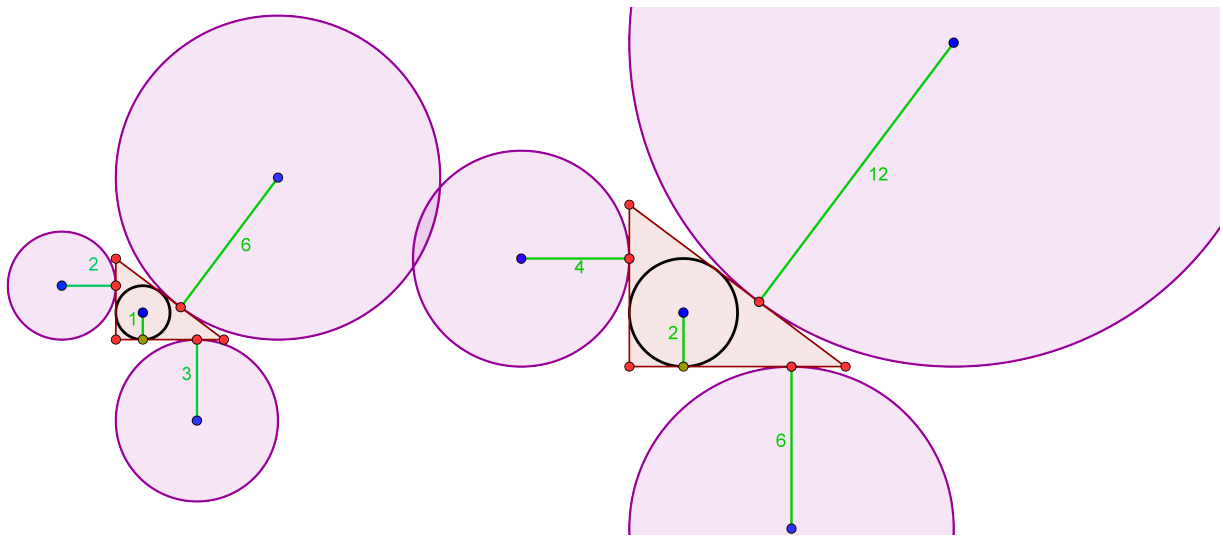
شکل ۴.۳: سه‌تایی‌های فیثاغورس و مقادیر صحیح شعاع دوائر محاطی داخلی

با جایگزینی این رابطه‌ها در فرمول مربوط به شعاع دایره‌ی محیطی (R) و دوائر محاطی خارجی (r_x, r_y, r_z) و داخلی (r), اثبات دقیق آن چه به صورت شهودی ملاحظه و استنباط کردیم، به دست می‌آید.

در مثلث قائم‌الزاویه مساحت برابر است با $S = \frac{xy}{2}$ ، و قرار می‌دهیم $p = \frac{1}{4}(x + y + z)$. شعاع دایره‌ی محیطی از فرمول $R = \frac{xyz}{4S}$ به دست می‌آید، پس $R = \frac{xyz}{4(\frac{xy}{4})} = \frac{z}{2} = \frac{a^2 + b^2}{4}$ و در نتیجه R عددی گویا می‌باشد، که اگر a و b فرد باشند، عددی صحیح خواهد بود.

$$\begin{aligned} r = \frac{S}{p} &\Rightarrow r = \frac{xy}{x + y + z} = \frac{(2ab)(a^2 - b^2)}{(2ab) + (a^2 - b^2) + (a^2 + b^2)} \\ &= \frac{(2ab)(a^2 - b^2)}{2a^2 + 2ab} = \frac{ab(a + b)(a - b)}{a(a + b)} \\ &= b(a - b) \end{aligned}$$

پس شعاع دایره‌ی محاطی داخلی، صحیح خواهد بود. در ادامه، شعاع دوائر محاطی خارجی مثلث قائم‌الزاویه را بررسی می‌کنیم.

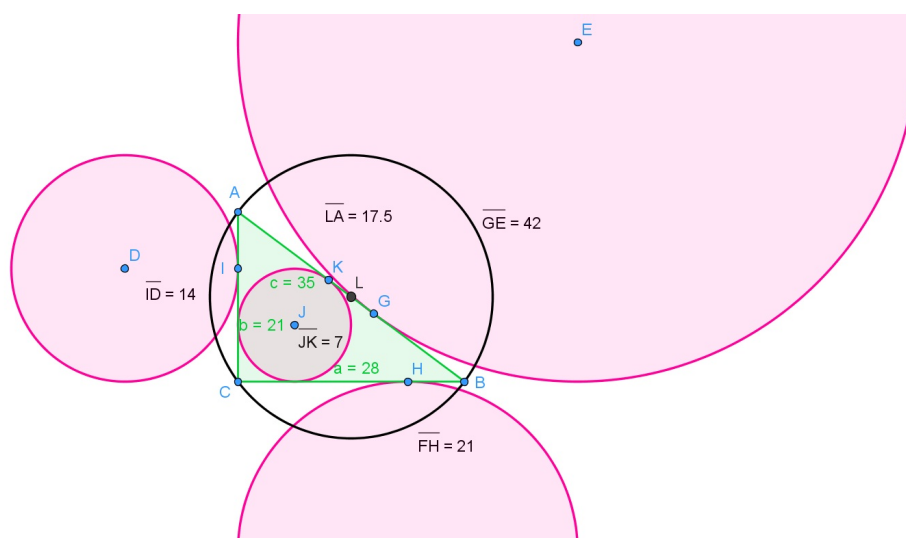


شکل ۷.۳: سه‌تایی‌های فیثاغورس و مقادیر صحیح شعاع دوائر محاطی

$$\begin{aligned}
 r_x = \frac{S}{p-x} &\Rightarrow r = \frac{\frac{xy}{2}}{\frac{1}{2}(x+y+z)-x} = \frac{xy}{x+y+z-2x} = \frac{xy}{y+z-x} \\
 &= \frac{2ab(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)+(a^2+b^2)-(2ab)} \\
 &= \frac{2ab(a^2-b^2)}{2a^2-2ab} = \frac{ab(a+b)(a-b)}{a(a-b)} \\
 &= b(a+b)
 \end{aligned}$$

به طریق مشابه $r_y = a(a-b)$ و $r_z = a(a+b)$ را به دست می‌آوریم. بنابراین شعاع این دوائر محاطی هم عددی صحیح خواهد بود.

شایان توجه است که در ایجاد ارتباط بین مفاهیم مختلف ریاضی، هر دو دیدگاهی که شرح داده شدند، از تکنولوژی‌های عددی بهره می‌برند. مطلوبست که پس از شرح دو راه پیوند جبر و هندسه، شاخه‌ای از ریاضی را ذکر کنیم که هندسه و جبر را در سطوح پیشرفته‌تر به موازات هم به جلو می‌برد.



شکل ۸.۳: سه‌تایی‌های فیثاغورس و شعاع دوائر محیطی و محاطی

۵.۳ هندسه‌ی جبری

گاهی دشمنی‌های نابجا در برهه‌ای از زمان منجر به دوستی‌ها و روابطی عمیق در آینده می‌شود. مثال آشکار این موضوع، همین دوگانگی بین جبر و هندسه می‌باشد. در سال ۱۹۵۸ میلادی با شعار ژان پل دیودونه: «لعنت بر اقلیدس و مرگ بر مثلث»، جبر و هندسه بسیار با هم فاصله گرفتند. متأسفانه ریاضیدانان زیادی این شعار را تکرار کردند. این شعار باعث شد که در بیشتر کشورها، از جمله ایران، از حجم تدریس مطالب هندسی در دبیرستان به طور چشم‌گیری کاسته شود. تنها کشورهایی نظیر شوروی سابق، ایتالیا، هلند و چند کشور دیگر تسلیم این شعار نشدند.

برای مثال بورباکی^{۱۸}، یک گروه از ریاضیدانان فرانسوی بودند که ظاهراً اعضای آن کاملاً مشخص نبودند و بر آن بودند که مسیر ریاضیات را به دلخواه و ابتکار خود تعیین کنند که در این مسیر نیز تا اندازه‌ای موفق شدند. آن‌ها در نوشته‌ها و کتاب‌های خود از به کار بردن شکل و نمودار خودداری می‌کردند و این یکی از دلایلی بود که با هندسه‌ی اقلیدسی به شکل کلاسیک آن مخالف بودند. آن‌ها معتقد بودند که اشکال و نمودارها در هندسه، ممکن است ما را به اثبات اشتباه هدایت کند و در واقع روش‌های جبر خطی و هندسه‌ی تحلیلی را مناسب‌تر می‌دانستند. امروزه با وجود نرم‌افزارهای

^{۱۸}Bourbaki

ریاضی، دیگر اشکال هندسی نه تنها مشکل‌زا نیستند، بلکه خود انگیزه‌ی خوبی برای مطالعه‌ی هندسه هستند.

نمی‌توانیم بگوییم هندسه بهتر است یا جبر. همانطور که مایکل اتیا می‌گوید: «تفاوت این دو مانند تفاوت انسان‌ها در مرد و زن بودن است. مهم انسان بودن این دو است». جبر و هندسه هم دو شاخه از ریاضیات هستند، به همدیگر وابسته‌اند و هیچ کدام نمی‌تواند به تنهایی جای دیگری را بگیرد. امروزه هندسه‌ی جبری یکی از قلمروهای وسیع ریاضیات است که جبر و هندسه را توأمان و در ترکیب با یکدیگر به کار می‌برد. هندسه‌ی جبری به مطالعه‌ی منحنی‌های جبری می‌پردازد و ارتباط وسیع و عمیقی با آنالیز اعداد مختلط، توپولوژی و نظریه‌ی اعداد دارد.

برخی از ریشه‌های این مبحث ریاضی به قرن پنجم قبل از میلاد و ریاضیدانان یونان باستان بر می‌گردد. مثلاً یکی از مسائل آن دوران این بود که اگر یک منشور قائم با قاعده‌ی مربع داشته باشیم، با چه مکعبی از نظر حجم برابر خواهد بود؟ به عبارت دیگر اگر قاعده‌ی منشور، مربعی به ضلع a باشد و ارتفاع منشور b باشد، آن گاه حجم آن برابر است با $a.a.b$ ، آن گاه می‌خواهیم طول ضلع مکعبی را حساب کنیم که حجم آن به اندازه‌ی حجم منشور باشد. به عبارتی دیگر باید ریشه‌ی سوم $a.a.b$ را حساب کنیم.

در این زمینه، دانشمندان دیگری مانند ابن هیثم و حکیم عمر خیام نیز فعالیت‌هایی انجام داده‌اند. خیام، روش عمومی حل معادلات درجه سوم را از راه قطع یک سهمی با دایره پیدا کرد. مسائل اولیه در هندسه‌ی جبری، بیشتر به یافتن مقاطع منحنی‌های جبری می‌پرداخت. در قرون بعد، دوران رنسانس و بعد از رنسانس نیز دانشمندانی مانند کاردانو، تاتاگلیا، پاسکال، دکارت، فرما، نیوتون، لایبنیتز، لاگرانژ، اوایلر و دیگران به این موضوع توجه کردند. در قرن نوزدهم و بیستم، این رشته به شکوفایی شکوهمندی رسید و مباحثی مانند تبدیلات، هندسه‌ی تصویری و مباحث متعدد دیگری را در بر گرفت. کاربردهای هندسه‌ی جبری شامل زمینه‌های آمار، تئوری کنترل، رباتیک، کدهای تصحیح خطا، ژنتیک، مدلسازی هندسی، تئوری بازی، بیولوژی، شیمی، اقتصاد، فیزیک و بسیاری از زمینه‌های دیگر است.

اما نکته‌ی قابل تأمل در زمینه‌ی هندسه‌ی جبری این است که همانطور که مردم عادی از «ریاضی» می‌ترسند، ریاضیدانان هم اکثراً از «هندسه‌ی جبری» می‌ترسند. مردم نمی‌دانند که چرا از ریاضی

می‌ترسند، ولی ریاضیدانان دلیل ترس خود از هندسه‌ی جبری را می‌دانند. درس هندسه‌ی جبری در دو - سه دهه‌ی گذشته وارد دروس دوره‌ی کارشناسی ریاضی شده است. امروزه بیش از ده‌ها کتاب در زمینه‌ی هندسه‌ی جبری مقدماتی نوشته شده، ولی باز هم شاهد انتشار کتب جدیدی در این زمینه هستیم که ادعا می‌کنند کتاب آن‌ها بهتر از کتب قبلی است. به عنوان مثال به لیست کتاب‌های زیر توجه کنید:

1. Introduction to Algebraic Geometry; B. Hassett; Cambridge Univ. Press, 2008.
2. An Invitation to Algebraic Geometry; K. E. Smith, L. Kahanpaa, P. Kekalainen, W. Traves; Springer, 2000.
3. Elementary Algebraic Geometry; K. Hulek; AMS, 2003.
4. Algebraic Curves and One-dimensional Fields; F. Bogomolov, T. Petrov; AMS, 2002.
5. Conics and Cubics; R. Bix; Springer, 1998.
6. Undergraduate Algebraic Geometry; M. Reid; Cambridge Univ. Press, 1998.
7. Elementary Geometry of Algebraic Curves; C. G. Gibson; Cambridge Univ. Press, 1998.
8. Algebraic Geometry for Beginners; C. Musili; Hindustan Book Agency (India) 2001.
9. Algebraic Curves; W. Fulton; Benjamin, MA, 1969.
10. Algebraic Curves; R. J. Walker; Springer 1978.

11. Algebraic Geometry: A First Course; J. Harris; Springer, 1992.

اگر چه هر کدام از این کتاب‌ها خوب هستند و هر یک در قسمت‌هایی مزایایی بر دیگر کتب دارد، اما اکثراً بر این عقیده هستند که هیچ کدام نمی‌تواند به تنهایی کتابی باشد که اهداف حداکثری را در این درس محقق کند. در واقع نویسندگان این کتاب‌ها می‌دانند باید درباره‌ی چه چیز صحبت کنند، ولی مشکل این است که نمی‌دانند چگونه باید راجع به آن صحبت کنند. در حقیقت باید گفت: همه‌ی ریاضیدانان در مورد چگونگی تدریس هندسه‌ی جبری مشکل دارند. اما ریشه‌ی این مشکل در کجاست؟ با بیان پیوندی ساده ولی سودمند به بحث درباره‌ی این مشکل می‌پردازیم.

۱.۵.۳ پیوند ماری در ریاضی

برای بررسی این مشکل در چارچوبی ادبی‌تر، به نتیجه‌ای که می‌توانیم از داستان مار داشته باشیم، رجوع می‌کنیم. نوشتن کلمه‌ی «مار» و کشیدن شکل مار به همراه آن دو جنبه دارد:

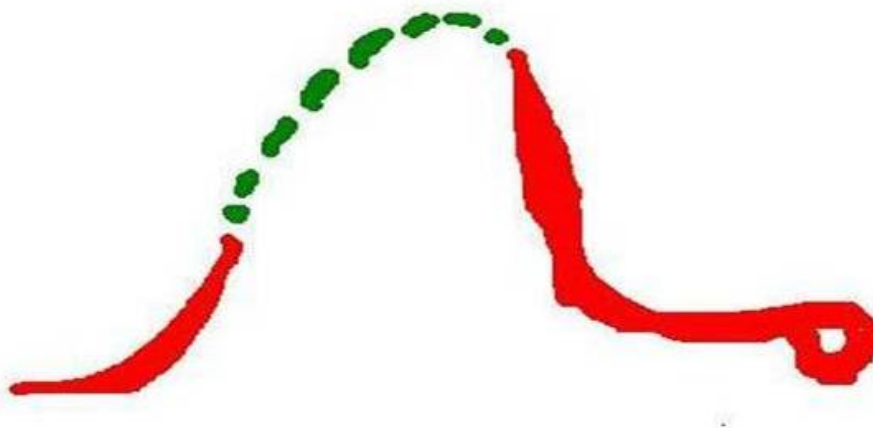
– به افراد کم‌سواد یا بی‌سواد که قدرت خواندن ندارند، کمک می‌کند که از روی شکل مار، موضوع را دریابند.

– افراد باسوادی که مار ندیده باشند، با دیدن شکل آن می‌فهمند که مار چگونه موجودی است. پس بهتر است کسی که کلمه‌ی «مار» را می‌نویسد، با انجام یک پیوند ساده به شکل زیر، خود مار را هم نشان دهد. این پیوند ساده را می‌توان به صورت‌های مختلف انجام داد و موجودهای متفاوتی که همه «مار» هستند، به دست آورد.

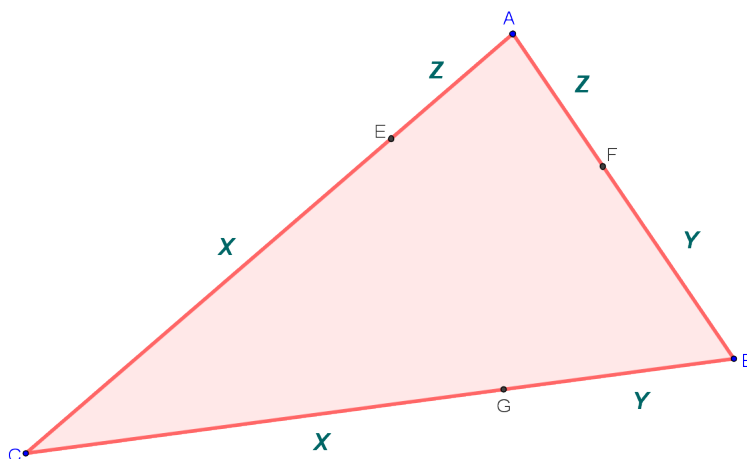
این پیوند ساده را «پیوند ماری» می‌نامیم. در حقیقت این کاری است که باید در ریاضی انجام دهیم. اما چگونه؟ با ارائه‌ی مثالی پیوند ماری در ریاضی را بررسی می‌کنیم.

مثال: اعداد حقیقی a ، b و c اضلاع یک مثلث‌اند، اگر و تنها اگر دستگاه دوری زیر فقط جواب‌های مثبت داشته باشد.

$$\begin{cases} a = x + y \\ b = y + z \\ c = z + x \end{cases}$$

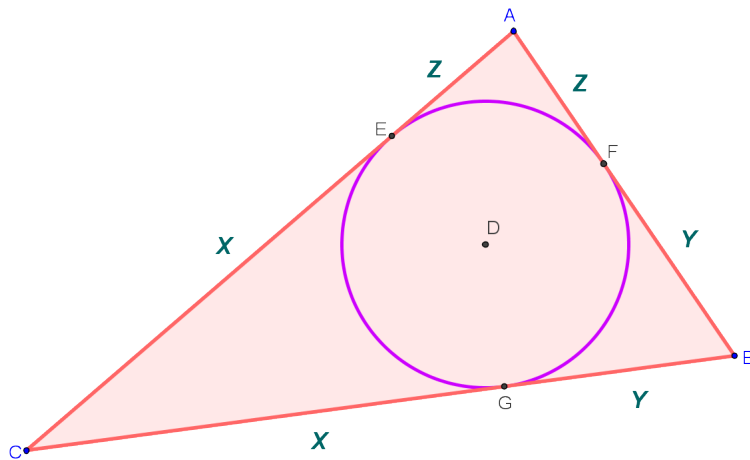


حل: این دستگاه دارای جواب‌های یکتایی به صورت $x = \frac{a+c-b}{4}$ ، $y = \frac{a+b-c}{4}$ و $z = \frac{b+c-a}{4}$ می‌باشد. اما این x و y و z چه قسمت‌هایی از مثلث هستند؟ حل جبری، کمکی برای پاسخ به این سؤال نمی‌کند. در واقع فقط نوشتیم مثلث، ولی شکل آن را نشان ندادیم. پس به سراغ هندسه می‌رویم.



حل جبری دستگاه به ما می‌گوید که جداسازی اضلاع مثلث مطابق شکل قبل، به صورت یکتایی امکان‌پذیر است. اما این کافی نیست. توقف در این مرحله یعنی فقط متکی بودن به جبر و نادیده

گرفتن تعبیر هندسی مسأله. پس شکل دقیق‌تری را با استفاده از مفاهیم هندسی رسم می‌کنیم. در



واقع x و y و z پاره‌خط‌هایی هستند که دایره‌ی محاطی داخلی روی اضلاع مثلث ایجاد می‌کند. این حل هندسی دستگاه دوری بالا بود و این همان «پیوند ماری» است و کاری است که در هندسه‌ی جبری انجام می‌شود. به عبارت دیگر: «هندسه‌ی جبری» یعنی همان «پیوند ماری» در ریاضی. یعنی بنویسیم «جبر» و آن را به وسیله‌ی «هندسه» به تصویر بکشیم. در حقیقت هندسه شکلی قدرتمند برای به تصویر کشیدن و نمایش جبر است. چند مثال دیگر از پیوند ماری در ریاضی (هندسه‌ی جبری) را بیان می‌کنیم.

۲.۵.۳ مثال

به کمک پیوند هندسه و جبر، می‌توانیم به شیوه‌ای ملموس‌تر مسائل مختلف را به تصویر کشیده و حل کنیم.

۱. اگر a, b و c اضلاع یک مثلث باشند، و قرار دهیم:

$$\frac{a+b}{c} = 1 + \alpha$$

$$\frac{a+c}{b} = 1 + \beta$$

$$\frac{b+c}{a} = 1 + \gamma$$

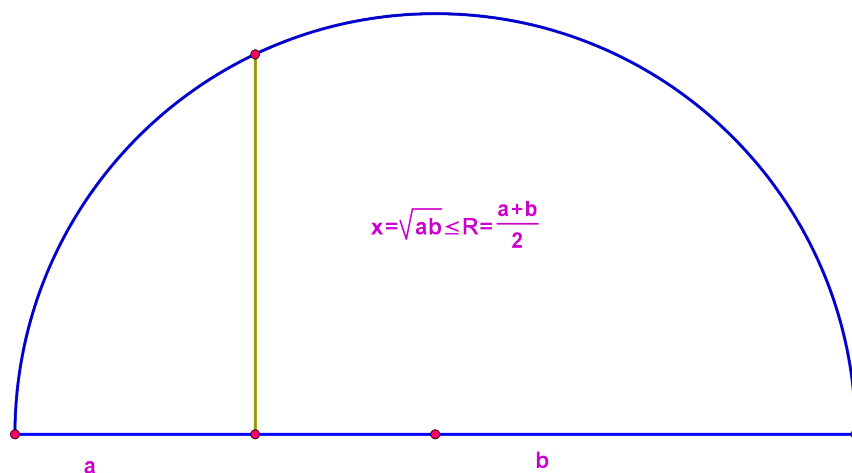
آن گاه $\alpha\beta\gamma \leq 1$ و حالت تساوی فقط برای مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشد.
 حل: باید نشان دهیم که: $(\frac{a+b}{c} - 1)(\frac{a+c}{b} - 1)(\frac{b+c}{a} - 1) \leq 1$ ، آن گاه:

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \leq abc$$

با توجه به دستگاه دوری ارائه شده در مثال قبل و جواب‌های آن خواهیم داشت:

$$8xyz \leq (x+y)(y+z)(x+z)$$

که رابطه‌ی قبل طبق نامساوی حسابی - هندسی همواره برقرار است، و نامساوی حسابی - هندسی هم یک «پیوند ماری» است.



۲. اگر سه عدد حقیقی x ، y و z در رابطه‌های زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} 0 < x < 1, & 0 < y < 1, & 0 < z < 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

آن گاه نامساوی زیر برقرار است:

$$xyz \geq 8(1-x)(1-y)(1-z)$$

حل: در مثلث دلخواه ABC طول‌های اضلاع AB, CA, BC را به ترتیب a, b و c و اندازه‌ی سطح را S می‌نامیم. طول‌های شعاع‌های دوایر محیطی و محاطی داخلی مثلث و طول خط‌المركزین این دو دایره را به ترتیب R, r و d می‌نامیم. بنابر قضیه‌ی اوایلر داریم:

$$(۱) \quad d^2 = R^2 - 2rR$$

از رابطه‌ی (۱) نتیجه می‌شود:

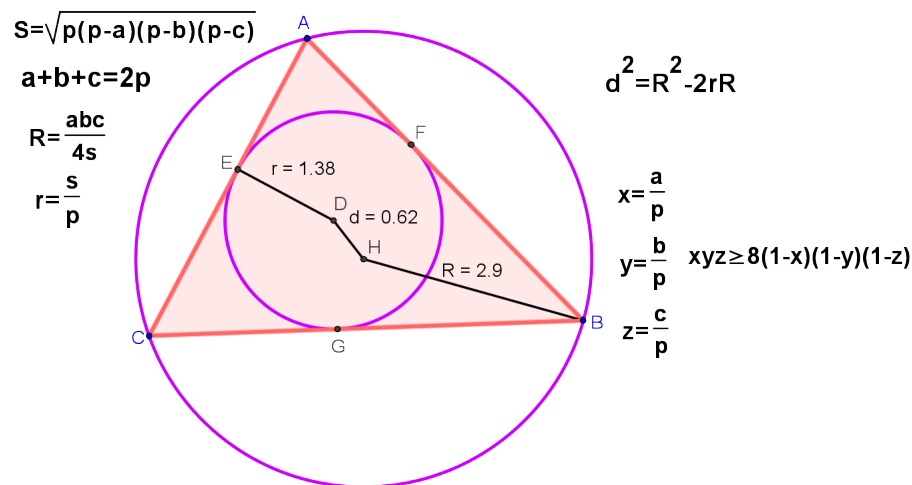
$$(۲) \quad R \geq 2r$$

از طرفی می‌دانیم که

$$\begin{cases} ۳. & R = \frac{abc}{4S} \\ ۴. & r = \frac{S}{p}, \quad p = \frac{1}{2}(a+b+c) \\ ۵. & S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{cases}$$

از رابطه‌های (۲)، (۳)، (۴) و (۵) و با قرار دادن $x = \frac{a}{p}$ ، $y = \frac{b}{p}$ و $z = \frac{c}{p}$ نامساوی خواسته شده اثبات می‌شود.

اکنون می‌توانیم مشکلی که در تدریس هندسه‌ی جبری است را به شیوه‌ای ملموس بیان کنیم، و آن مشکل این است که ما به پایه‌های این درس در دبیرستان توجه نکرده و می‌خواهیم همه چیز را در



دانشگاه شروع کنیم. در دبیرستان از انجام «پیوند ماری» غافل بوده و هندسه‌ی تحلیلی و هندسه‌ی اقلیدسی را کنار گذاشته یا کاملاً تضعیف کرده‌ایم. آیا بهتر نیست مبحث هندسه‌ی جبری، که ما آن را به عنوان مطالعه‌ی ریشه‌های چندجمله‌ای‌های چندمتغیره روی یک میدان تعریف می‌کنیم، با معرفی چندجمله‌ای روبرو شروع کنیم: $f(x) = x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4rR)x - 4rR$ که در آن r و R و p به ترتیب شعاع دایره‌ی محاطی، شعاع دایره‌ی محیطی و نصف محیط مثلثی به اضلاع a و b و c می‌باشند، و به راحتی نشان دهیم که ریشه‌های آن همان اضلاع مثلث هستند. به عبارت دیگر، این معادله یک «پیوند ماری» بین شش موجود هندسی برقرار می‌کند و برای همه‌ی مثلث‌ها درست است. با توجه به این چندجمله‌ای می‌توان «پیوندهای ماری» دیگری یافت. چندجمله‌ای‌های دیگری که ریشه‌های آن، به عنوان مثال ارتفاع‌های یک مثلث باشند و از این قبیل. کمبود این «پیوندهای ماری» در کتب هندسه‌ی جبری شاید تأثیر منفی شعاع بورباکی بوده است.

فصل ۴

نتایج و پیشنهادات

۱.۴ اثبات در برنامه‌ی آموزشی

چالش اصلی برای آموزش دهندگان ریاضیات، کشف روش‌هایی برای اثبات هندسی است که کارکردهای فصاحتی، اکتشافی، توضیحی و در کنار این‌ها، توجیه و تأیید را دارا باشد. تفاوت‌های قابل ملاحظه‌ای در برنامه‌ی آموزشی ریاضیات در کشورهای مختلف در رابطه با رفتار اثبات وجود دارد و ما باید برای نتیجه‌گیری و تعمیم نتایج با هوشیاری، تنها به برنامه‌ی تعداد کمی از این کشورها توجه کنیم. به علاوه ما باید همیشه تلاش کنیم تا دریابیم که پاسخ‌های دانش‌آموزان براساس کدام آموخته‌های آن‌هاست، در برنامه‌ی آموزشی آن‌ها تأکید بر چه چیزی شده است و چه چیزی نادیده گرفته می‌شود. اثبات ریاضی نیاز به یک تدریس خیلی خوب و دقیق دارد تا به طور مناسبی در اذهان دانش‌آموزان جای بگیرد.

۲.۴ جبر و تفکر جبری

برخی از مشکلاتی که دانش‌آموزان در مطالعه‌ی جبر تجربه می‌کنند، مشکلات عمومی هستند. مانند خطا در معکوس کردن که در بسیاری مطالعات به دست آمده است (کلمنت، لوک هد و مانک،

۱۹۸۱، کاپوت و سیمزنايت، ۱۹۸۳، فیلپ، ۱۹۹۲)^۱، که به نظر می‌رسد با مفاهیم هندسی مورد استفاده در مسائل ارتباط دارند. در حالات دیگر، مفهوم جبری برای دانش‌آموزان مسأله‌ساز می‌شود. بعضی تحقیقات، اهمیت جبر در هندسه را بیان کرده و مورد تأکید قرار می‌دهند. از این رو پیشنهاد می‌شود که دانش‌آموزان از قبل آمادگی بهتری در جبر داشته باشند، سپس به کلاس هندسه وارد شوند. آموزش هندسه در سطح دبیرستان، باید با دقت بر جنبه‌های گوناگون تفکر جبری موجود متمرکز باشد. استفاده‌های متعدد از نمادها مانند مقادیر ثابت، مجهول‌ها و متغیرها باید در کلاس بحث شوند. به خصوص ارتباط بین یک نماد و مرجع آن باید برای دانش‌آموزان کاملاً واضح شود. دانش‌آموزان غالباً متغیرها را مانند نمادهایی تلقی می‌کنند که بیشتر از مقادیر کمی مربوط دستکاری می‌شوند.

وایت و میتکل مور (۱۹۹۶)^۲ بیان می‌کنند که پاسخ به معادلات ساده برای دانش‌آموزان مشکل به نظر نمی‌رسد، ولی پاسخ به معادلات چند مجهولی برای آن‌ها مشکل‌ساز است. از این رو، آموزش هندسه باید به گونه‌ای باشد که دانش‌آموزان به قدر کافی مهارت‌ها و دانش خود را برای حل چنین معادلاتی گسترش دهند. یک راه برای درک بیشتر موضوع، در نظر گرفتن یک چارچوب به صورت سلسله مراتبی، مانند ون‌هیلی خواهد بود که می‌تواند برای تفکر جبری به خوبی واضح باشد. همچنین استفاده از تمرین‌هایی که تفکر جبری گوناگون را در زمینه‌های هندسی می‌طلبد، می‌تواند در نظر گرفته شود. در نهایت این که تحقیق بیشتر ممکن است توانایی‌های حل مسأله برای دانش‌آموزان در هندسه را، به پیش زمینه‌هایشان در جبر مرتبط کند و بیان کند که دانش‌آموزان برای توانایی بیشتر در حل مسائل هندسی به جبر نیاز دارند.

۳.۴ هندسه

هندسه بخشی از برنامه‌ی درسی ریاضیات است که سرگرم‌کننده و مهیج، دیداری، شهودی، خلاق و مورد تقاضا و مورد نیاز می‌باشد. تصور خود را به کار بگیرید و آن را به دانش‌آموزان خود منتقل

^۱ Clement, Lockhead & Monk, sims-knight, Philipp

^۲ White & Mitchelmore

کنید. نمایش‌های کلاسی خیلی خوب خلق کنید، مدل‌های هندسی را از سقف کلاس آویزان کنید، دانش‌آموزان را در ساخت اشیا و اشیاء تصویری درگیر کنید. به آن‌ها بگویید تعاریف را درک کنند، سپس نتایج منطقی را کشف کنند. بسیاری از دانش‌آموزان از مطالعه‌ی ریاضیات خسته می‌شوند و آن را رها می‌کنند. هندسه می‌تواند به درگیر کردن و سرگرم نگه‌داشتن آن‌ها کمک کند.

گسترش‌های جدید در تکنولوژی محاسباتی بیان می‌کند که قرن بیست و یکم، قرنی است که در آن تفکر فضایی و تجسم، حیاتی هستند. هندسه جایگاهی است که همه‌ی آن مهارت‌های مهم پرورش یافته‌اند. خودتان را با هندسه سرگرم کنید و تفکر هندسی را در دانش‌آموزان ایجاد کنید.

مواردی از گسترش هندسه که باید در مورد آن‌ها بدانیم عبارتند از:

- ۱- گسترش هندسه‌ی تحلیلی در نمادسازی جبری و روندهایی که برای توصیف اشیاء هندسی به کار گرفته می‌شود؛
- ۲- مطالعه و طبقه‌بندی مقاطع مخروطی و خانواده‌های دیگر از منحنی‌های مسطح و جواب مسائلی که آن‌ها را در بر دارد؛
- ۳- چگونه مسأله‌ی تجسم شیء (در نقاشی و دیگر حوزه‌ها) پایه و اساس هندسه‌ی تصویری شد؛
- ۴- چگونه حوزه‌ی هندسه‌ی دیفرانسیل آغاز شد (با ایجاد عبارات تحلیلی برای طول خم و انحنا‌ی منحنی‌های مسطح و متعاقباً رویه‌ها) و چگونه این ایده‌ها به فضاها با هر بعدی تعمیم داده شد؛
- ۵- گسترش هندسه‌ی نااقلیدسی؛
- ۶- طبقه‌بندی هندسه‌ها؛
- ۷- گسترش توپولوژی.

۴.۴ تناسب

اصطلاح تناسب، اغلب برای تقویت هدفمند یا موزون بخش‌های مختلف یک کار هنری به کار می‌رود. تناسب از واژه‌ی لاتینی (*conciatas*) به معنی ماهرانه کنار هم قراردادن، به وجود آمده است و برای هر موضوع یا موقعیتی (اگر چه تناسب در بحث موسیقی بیشتر به کار برده می‌شود و

بدین معنی است که قسمت‌های مختلف یک قطعه موسیقی – ملودی، هارمونی، ریتم و مانند آن، همدیگر را تقویت می‌کنند) می‌تواند به کار رود.

در آینده ممکن است به دنبال تناسب بیشتری در برنامه‌ی آموزشی ریاضیات باشیم، مخصوصاً در اصطلاح تقویت موزون و هدفمند تفکر ریاضی، به وسیله‌ی پیوند جبر و هندسه. این رویکرد توسط جیاکوینتو^۳ (۲۰۰۷) از منظر معرفت‌شناسی مورد حمایت قرارگرفت: «تقابل جبری – هندسی بیشتر از این که یک دوگانگی را بیان کند، چیزی شبیه به یک دید همه‌جانبه را ارائه می‌کند».

۵.۴ هندسه و جبر

تأمل بیشتر بر سخنان کاکستر، بل و اتیا ارزشمند است. تناسب بیشتر در برنامه‌ی آموزشی ریاضیات مدرسه به وسیله‌ی پیوند هندسه و جبر ممکن است ما را قادر سازد، همانطور که کاکستر هم پیشنهاد می‌کند، مقدار مشابه ریاضی و جبر خطی را در زمان کمتر تدریس کنیم تا کمی زمان برای تدریس هندسه باقی بماند. مطابق استدلال بل، هندسه جایگاه غنی‌تری از هر بخش دیگری از ریاضیات است و نشان می‌دهد که هندسه چگونه می‌تواند یک منبع غنی از ایده‌ها برای آموزش تفکر ریاضی باشد.

همانطور که اتیا اشاره می‌کند، هندسه در واقع به عنوان بخش قدرتمندی از ریاضیات است. نه تنها برای چیزهایی که به طور آشکارا هندسی هستند، بلکه حتی برای چیزهایی که این گونه نیستند. چنانکه اتیا بیان کرد: «مفاهیم آموزشی واضح هستند. ما باید دو سبک از تفکر را ترویج و گسترش دهیم. در واقع این اشتباه است، که بر ارزش یکی بیشتر از دیگری تأکید کنیم و گمان می‌کنم که هندسه در سال‌های اخیر متحمل رنج شده است. تناسب دقیق، ذاتاً موضوعی برای بحث مفصل است و باید به سطح دانش‌آموزان و توانایی آن‌ها وابسته باشد. نکته‌ی اصلی این است که هندسه شاخه بزرگی از ریاضیات نیست، اما راهی برای تفکر است که به همه‌ی شاخه‌ها نفوذ می‌کند».^۴ (۲۰۰۴)

در این باره می‌گوید: «روح ریاضیات ممکن است هندسه باشد، اما جبر قلب آن است». و البته

^۳ Giaquinto

^۴ Usiskin

شخص هم قلب را نیاز دارد و هم روح را. نهایتاً می‌توانیم بگوییم بدون هندسه، زندگی بیمعنی است.

۶.۴ نگاهی به آینده

در انگلستان، اجرای یک برنامه‌ی آموزشی جدید برای مدراس در سپتامبر ۲۰۰۸ شروع شد. این برنامه‌ی آموزشی قصد داشته است به مدراس انعطاف بیشتری بدهد، تا یادگیری را با توجه به نیازهای یادگیرندگان متناسب کنند و در نتیجه محتوای موضوعی تعیین شده‌ی کمتری وجود دارد (QCA ، ۲۰۰۷، صفحه ۴). در حالی که دانش‌آموزان هنوز دانش موضوعی را آموزش می‌بینند، برنامه‌ی آموزشی جدید، دانش موضوعی را به وسیله‌ی مفاهیم و روندهای کلیدی که به نظم هر موضوع توجه می‌کند، متناسب می‌کند (QCA ، ۲۰۰۹). این مفاهیم کلیدی شامل: شایستگی، خلاقیت، کاربردها و مفاهیم ریاضیات، و فهم انتقادی می‌باشد. روندهای کلیدی نیز شامل: نمایش، تحلیل، تفسیر و ارزیابی کردن، و گفتگو و فکر کردن می‌باشد.

تمرکز بر مفاهیم و روندها، فرصت‌های جدیدی را ایجاد می‌کند و این اطمینان را حاصل می‌کند که رویکردهای جبری و هندسی استعدادهای بالقوه‌ی کاملی هستند، که برای استفاده‌ی درست از یادگیری دانش‌آموزان به کار می‌روند. گرایش‌های مخالف هندسه و جبر که پیش از این هم مطرح می‌شد، در حال محو شدن در ریاضیات هستند. برای مثال، آرتین^۵، یکی از جبردانان بزرگ قرن بیستم، از اصطلاح جبر هندسی در عنوان کتاب خود استفاده کرد. از کاربردهای متداول جبر هندسی می‌توان دید کامپیوتری، بیومکانیک، رباتیک و مکانیک حرکت پرواز فضایی را نام برد. پس هندسه‌ی جبری مطالعه‌ی هندسه‌هایی است که در جبر وجود دارند و بخشی اصلی در ریاضیات معاصر را به خود اختصاص می‌دهد و ارتباطات مفهومی متعدد با حوزه‌های گوناگون نظیر آنالیز مختلط، توپولوژی و نظریه‌ی اعداد دارد.

^۵ Artin

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی

empirical	آزمایشی، تجربی
invention	ابتکار
proof	اثبات
performance	اجرا
conception	ادراک، تصور
link, relationship	ارتباط
argument, reasoning	استدلال
deductive	استقرایی
inductive	استنتاجی، قیاسی
intersect	اشتراک
principle	اصل
horizontal	افقی
motivation	انگیزش
equal volume	باحجم برابر
curriculum	برنامه‌ی آموزشی
concrete	به هم چسبیده
exterior	بیرونی
spectrum	بینایی

flag.....	پرچم
dynamic	پویا
transformation	تبدیل
visualization.....	تجسم
order	ترتیب
drawing.....	ترسیم
syntactic	ترکیبی
illustration	تصویر
generalization	تعمیم
interpretation.....	تفسیر
thinking.....	تفکر
symmetry.....	تقارن
digital technology.....	تکنولوژی عددی
concinnity.....	تناسب
algebraic.....	جبری
framework.....	چارچوب
double bubbles	حباب دوتایی
conjecture	حدس
equidistant.....	دارای مسافت مساوی
interior.....	درونی
manipulation	دستکاری
sequence.....	دنباله
dichotomy	دوگانگی
visual.....	دیداری
approach	رویکرد

language	زبان
construction	ساخت
trinomial	سه‌جمله‌ای
parabola	سه‌می
black hole	سیاه‌چاله
branch	شاخه
figure, shape	شکل
intuition	شهود
design	طرح
vertical	عمودی
space	فضا
spatial	فضایی
power	قدرت
application	کاربرد
bounded	کران‌دار
sphere	کره
dragging	کشیدن
animation	متحرک‌سازی
variable	متغیر
unknown	مجهول
computer modeling	مدلسازی کامپیوتری
problem	مسأله
trajectory	مسیر
characteristics	مشخصات
discriminant	مشخص‌کننده

contemporary.....	معاصر
meaning.....	معنی، مفهوم
implication.....	مفهوم
locus.....	مکان هندسی
tangent.....	مماس
region.....	ناحیه
invariance.....	نامتغیر
representation.....	نمایش
graph.....	نمودار
band.....	نوار
entity.....	وجود
convergent.....	همگرا

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

algebraic.....	جبری
animation.....	متحرک‌سازی
application.....	کاربرد
approach	رویکرد
argument.....	استدلال
band.....	نوار
black hole.....	سیاه‌چاله
bounded.....	کران‌دار
branch.....	شاخه
characteristics.....	مشخصات
computer modeling.....	مدلسازی کامپیوتری
conception.....	ادراک، تصور
concinnity.....	تناسب
concrete.....	به هم چسبیده
conjecture	حدس
construction.....	ساخت
contemporary.....	معاصر
convergent.....	همگرا

curriculum	برنامه‌ی آموزشی
deductive	استقرایی
design	طرح
dichotomy	دوگانگی
digital technology	تکنولوژی عددی
discriminant	مشخص کننده
double bubbles	حباب دوتایی
dragging	کشیدن
drawing	ترسیم
dynamic	پویا
empirical	آزمایشی، تجربی
entity	وجود
equal volume	با حجم برابر
equidistant	دارای مسافت مساوی
exterior	بیرونی
figure	شکل
flag	پرچم
framework	چارچوب
generalization	تعمیم
graph	نمودار
horizontal	افقی
illustration	تصویر
implication	مفهوم
inductive	استنتاجی، قیاسی
interior	درونی

interpretation	تفسیر
intersect	اشتراک
intuition	شهود
invariance	نامتغیر
invention	ابتکار
language	زبان
link	ارتباط
locus	مکان هندسی
manipulation	دستکاری
meaning	معنی، مفهوم
motivation	انگیزش
order	ترتیب
parabola	سهمی
performance	اجرا
power	قدرت
principle	اصل
problem	مسأله
proof	اثبات
reasoning	استدلال
region	ناحیه
relationship	ارتباط
representation	نمایش
sequence	دنباله
shape	شکل
space	فضا

spatial	فضایی
spectrum	بینایی
sphere	کره
symmetry	تقارن
syntactic	ترکیبی
tangent	مماس
thinking	تفکر
trajectory	مسیر
transformation	تبدیل
trinomial	سه‌جمله‌ای
unknown	مجهول
variable	متغیر
vertical	عمودی
visual	دیداری
visualization	تجسم

کتاب نامه

- [1] M. Atiyah, (1982). What is geometry? Mathematical Gazette, 66(437), 179–184 [reprinted in C. Pritchard, (Ed) (2003). The changing shape of geometry: Celebrating a century of geometry and geometry teaching. Cambridge: Cambridge University Press, pp24–29].
- [2] M. Atiyah, (2001). Mathematics in the 20th Century, American Mathematical Monthly, 108(7), 654–666.
- [3] [Bil10] M. Billich – Deduction and Proving of Geometric Statements in Interactive Geometry Environment. Proceedings of the 30th Conference on Geometry and Graphics: 33–41, Charles University, Prague: MATFYZPRESS, 2010.
- [4] N. D. Brubaker, S. Carter, S. M. Evans, D. E. Kravatz, S. Linn, S. W. Peurifoy, & R. Walker, (2008). Double bubble experiments in the three-torus. Math Horizons, 15(4), 18–21.
- [5] L. Charbonneau, (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to geometry. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.),

- Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. (pp. 15–37). Dordrecht: Kluwer.
- [6] H. S. M. Coxeter, & S. L. Greitzer, (1967). *Geometry revisited*. New York: Mathematical Association of America.
- [7] Department for Education and Science (DES). (1988). *Mathematics for ages 5 to 16*. London: DES.
- [8] M. D. de Villiers, (1990). *Proof in the Mathematics Curriculum*. Paper presented at the National Subject Didactics Symposium. University of Stellenbosch.
- [9] J. Dindyal, *Algebraic Thinking in Geometry at High School Level: Students' Use of Variables and Unknowns*, National Institute of Education, Singapore.
- [10] J. Guncaga, *GeoGebra in Mathematical Educational Motivation*, Department of Mathematics, Faculty of Education, Catholic University in Ružomberok, Slovakia, 2011.
- [11] [H+09] S. Hajdu, I. Czeglédy, S. Hajdu, A. Kovács – *Matematika 9*, Hungary, Budapest: Muszaki Kiadó, 2009.
- [12] Healy, L., Hoelzl, R., Hoyles, C., & Noss, R. (1994). *Messing Up*. *Micromath*, 10(1), 14–16.
- [13] [HL06] M. Hejný, G. Littler – *Transmissive and constructivist approaches to teaching*. *Creative Teaching in Mathematics*: 11 – 34. Charles University, Prague, 2006.

- [14] M. Hohenwarter, K. Jones, Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra, May 15, 2010, (ip27-3), BSRLM-IP-27-3-22.
- [15] C. Hoyles, & K. Jones, (1998). Proof in dynamic geometry contexts. In: C. Mammana and V. Villani (Eds), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century. (pp. 121-128). Dordrecht: Kluwer.
- [16] K. Jones, (1999), Students interpretations of a dynamic geometry environment, in I. Schwank (ed.), European Research in Mathematics Education. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- [17] K. Jones, (2002). Issues in the teaching and learning of geometry. In L. Haggarty (Ed.), Aspects of teaching secondary mathematics: Perspectives on practice (pp. 121-139). London, UK: Routledge Falmer.
- [18] K. Jones, (2010), Linking geometry and algebra in the school mathematics curriculum.
- [19] [Kop97] J. Kopka – Problem Posing and learning of Mathematics. Mathematical Investigations in School Mathematics 1: 1 – 7, University of Oslo, Norway, 1997.
- [20] A. Krauter, Role of the Geometry in GPS positioning, Department of Surveying Technical University of Budapest, H-1521 Budapest, Hungary, July 1, 1998.

- [21] L. Kvasz, (2005). Similarities and differences between the development of geometry and of algebra. In C. Cellucci & D. Gillies (Eds.), *Mathematical reasoning and heuristics* (pp.25–47). London: King's College Publications.
- [22] P. F. Lammertsma, *Satellite Navigation*, Institute of Information and Computing Sciences, Utrecht University, February 2, 2005.
- [23] D. Logothetti, & H. S. M. Coxeter, (1980). An interview with H. S. M. Coxeter, the king of geometry. *Two-Year College Mathematics Journal*, 11(1), 2–19.
- [24] C. Mammana, & V. Villani, (Eds.). (1998). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century*. Dordrecht: Kluwer.
- [25] National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: Final report of the national mathematics advisory panel*. Washington, DC: U.S. Department of Education.
- [26] National Aeronautics and Space Administration (NASA) (2006), *NASA Achieves Breakthrough In Black Hole Simulation*. Website accessed 31 August 2009: <http://www.nasa.gov/vision/universe/starsgalaxies/gwave.html>
- [27] B. W. Nichols, (1986). *The effect of different sequences of geometry and algebra II on mathematics education*. Unpublished doctoral dissertation, University of Missouri, Kansas City.
- [28] Office for Standards in Education (Ofsted). (2008). *Mathematics: understanding the score*. London: HMSO

- [29] Qualifications and Curriculum Authority (QCA). (2004). Interpreting the mathematics curriculum: Developing reasoning through algebra and geometry. London: QCA.
- [30] Royal Society. (2001). Teaching and learning geometry 11–19. London: Royal Society.
- [31] A. H. Schoenfeld, & A. Arcavi, (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher*, 81, 420–427.
- [32] [Tka07] Š. Tkacik – Why logarithms? *Matematyka XII prace naukowe*: 429–434, Poland, Czestochowa: Akademia Jana Długosza, 2007.
- [33] Z. Usiskin, (1982). Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry (Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Project). Chicago, IL; University of Chicago, Department of Education. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 220 288).
- [34] Z. Usiskin, (2004). Should all students study a significant amount of algebra? Keynote at the Dutch National Mathematics Days (NWD), 2004. [keynote also in *Nieuw Archief voor Wiskunde*, June 2004, 147–151].
- [35] S. Wagner, & C. Kieran, (1999). An agenda for research on the learning and teaching of algebra. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking: Grades K – 12* (pp. 362–372). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[36] W. Whitely, (1999), The Decline and Rise of Geometry in 20th Century North America. Proceedings of the 1999 Conference of the Mathematics Education Study Group of Canada. St. Catharines, Ontario: Brock University.

[37] T. Zachariades, K. Jones, E. Giannakoulis, I. Biza, D. Diacoumopoulos, & A. Souyoul, (2007). Teaching calculus using dynamic geometric tools. Southampton, UK: University of Southampton.

[۳۸] شرف‌الدین، احمد. هندسه دلیذیر، انتشارات مدرسه، چاپ سوم ۱۳۸۳

[۳۹] کاکستر، ه.س.م. گریترز، س.ل. بازآموزی و بازشناخت هندسه، ترجمه عبدالحسین

مصطفی، انتشارات مدرسه، چاپ سیزدهم ۱۳۸۶

ABSTRACT

Last name: Moradi shalal		First name: Mahshid	
Title: Linking Geometry and Algebra			
Supervisor: Pr. Omid Ali Shehni Karamzadeh			
Advisor: Dr. Mehrdad Namdari			
Education grade: M.Sc		Course: Mathematic Education	
Faculty of Mathematical Science and Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz.			
Graduation date: 2011–		number of pages: 100	
Keywords: Geometry, Algebra, Curriculum, Dynamic Geometry Software, Algebraic Geometry, Dichotomy.			
Abstract: One of the difficulties in Geometry teaching in recent years, is lack of relationship between Geometry and real world, and also the other mathematics branches. Especially, difficulty in Algebraic Geometry teaching at university, such that professors are not unanimous to select unified subjects to teach. So we represent the relationship between Geometry and Algebra at elementary level in this thesis, that can be discussed at high school. First we focus on Algebra and its necessity to teach and to learn, and explain the role of algebraic thinking to understanding Geometry much better, and be able to solve geometric problems better. In second chapter, we express the importance of Geometry in school mathematics curriculum, and the high power of Geometry to link with several subjects through some examples. In third chapter, we focus on linking Geometry and Algebra despite their dichotomy, and express some approaches to linking them, which ends to Algebraic Geometry at high level. Finally conclusion and recommendation will be discussed in the last chapter.			