

چکیده

نام خانوادگی: حمیدی	نام: سید مصطفی
عنوان پایان نامه: تأثیر نرم افزار بر یادگیری مطالب ریاضیات (هندسه)	
استاد راهنما: دکتر امیدعلی شهنی کرمزاده	استاد مشاور: دکتر مهرداد نامداری
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد	رشته: ریاضی محض
محل تحصیل: دانشگاه شهید چمران اهواز	گرایش: آموزش ریاضی
تاریخ فارغ التحصیلی: تیرماه ۱۳۹۰	دانشکده: علوم ریاضی و کامپیوتر
تعداد صفحات: ۹۰	
واژه‌های کلیدی: پویا، تکنولوژی، نرم افزار، <i>GeoGebra</i> ، <i>Cabri</i> ، <i>Sketchpad</i> .	
چکیده: در حدود دو دهه است که تحقیقات بر روی استفاده از تکنولوژی در کلاس درس ریاضیات با کانون موضوعات یادگیری و استفاده از تکنولوژی برای دانش‌آموزان صورت گرفته است. باید فرصت‌های مناسبی فراهم کرد تا معلمان و دانش‌آموزان تجربیات جدید خود را با استفاده از تکنولوژی، هم از نظر تکنیکی و هم پداگوژیکی آزمایش کنند. در این پایان نامه با معرفی تکنولوژی و بیان اینکه چهارمین قله‌ی تاریخ ریاضیات استفاده از تکنولوژی است، سیستم‌های هندسی پویا، <i>DGS</i> را برای کلاس ریاضیات معرفی می‌کنیم و اینکه تجسم و شهود با استفاده از تکنولوژی و نرم‌افزارها بهتر نشان داده می‌شود. با معرفی آزمون کمکی هماهنگ، <i>TAO</i> و گزارش‌هایی از <i>TIMSS</i> نقش تکنولوژی جدید را در یادگیری ریاضیات گفته و یک چارچوب مفهومی ارائه می‌دهیم. در فصل دوم برخی نرم‌افزارها همچون <i>Sketchpad</i> و <i>Cabri</i> را معرفی می‌نماییم. در فصل سوم به معرفی کامل نرم‌افزار <i>GeoGebra</i> همراه با مثال‌های کاربردی می‌پردازیم. در نهایت نتایج و پیشنهاداتی خواهیم داشت.	

فهرست مطالب

۷	۱ تکنولوژی در ریاضیات
۷	۱.۱ مقدمه
۸	۲.۱ بکارگیری تکنولوژی در تدریس و یادگیری ریاضیات
۹	۳.۱ <i>DGS</i>
۱۲	۴.۱ تجسم فکری و کشف در ریاضیات با استفاده از نرم افزار
۱۳	۵.۱ دسته بندی نرم افزارهای ریاضیات
۱۴	۶.۱ اثبات و نرم افزار برای آموزش معلمان
۱۵	۷.۱ <i>TAO</i>
۱۵	۸.۱ گزارش تیمز: <i>TIMSS</i>
۱۶	۹.۱ نقش تکنولوژی جدید بر یادگیری ادراک
۱۷	۱۰.۱ یک چارچوب مفهومی برای کاربرد تکنولوژی: تأثیر پداگوژیک
۱۹	۱۱.۱ استفاده از تکنولوژی به عنوان یک سازمان دهنده و تقویت کننده
۲۲	۲ برخی نرم افزارها
۲۲	۱.۲ مقدمه
۲۳	۲.۲ <i>Geometer – Sketchpad</i>
۲۳	۳.۲ یک تقسیم بندی خاص برای تدریس کتابهای درسی با استفاده از <i>Sketchpad</i>
۲۵	۴.۲ <i>Cabri – Geometer</i>

۵.۲	برخی ابزارهای کاربردی نرم افزار	۲۷
۱.۵.۲	<i>Locus</i>	۲۷
۲.۵.۲	متحرک سازی	۲۹
۶.۲	مثال های کاربردی	۲۹
۱.۶.۲	قانون اول کپلر	۲۹
۲.۶.۲	قضیه فیثاغورث	۳۱
۳.۶.۲	دایره های محاطی داخلی و خارجی یک مثلث	۳۲
۷.۲	فرضیاتی درباره <i>Cabri</i>	۳۳
۸.۲	چهارضلعی واریگون	۳۵
۹.۲	ساخت و استقراء با ابزارهای پویای هندسی	۳۷

۳ *GeoGebra*

۳۹	GeoGebra
۱.۳	مقدمه‌ای بر GeoGebra
۲.۳	جئوجبرا برای مدارس ابتدایی
۳.۳	یک چارچوب آموزشی
۴.۳	ارزیابی چارچوب‌ها
۱.۴.۳	قضیه‌ی دایره دکارت
۵.۳	فعالیت اکتشافی و پرمعنی
۶.۳	یک درس ترسیمی از توابع حقیقی
۷.۳	جئوجبرا درهندسه
۱.۷.۳	مسأله سکه طلایی
۲.۷.۳	روشهای یاددهی ریاضیات
۳.۷.۳	مدلسازی يك مسأله‌ی مکان هندسی با استفاده از GeoGebra

۴ نتایج و پیشنهادات

۶۷	نتایج و پیشنهادات
۶۷	۱.۴ مقدمه

۶۸	تأثیر Cabri بر سطوح استدلال دانش آموزان	۲.۴
۷۰	GeoGebra	۳.۴
۷۲	نتایج استفاده از جئوجبرا	۱.۳.۴
۷۳	نکات ضعف استفاده از جئوجبرا	۲.۳.۴
۷۴	مشکلات	۳.۳.۴
۷۵	فرآیندها و اثرات آموزشی: نمایش ویدیو - مرکز	۴.۴
۷۶	استفاده از جئوجبرا چه بازتاب‌هایی در کلاس درس معلمان دارد؟	۵.۴
۷۶	پیشنهادهای	۶.۴
۷۹	واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی	
۸۲	واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی	
۸۴	کتاب نامه	

پیشگفتار

ترجیح دادم تا سرآغاز پیشگفتار این پایان‌نامه را به بیان جملاتی که از زبان استادم پروفسور کرمزاده در کلاس درس پایان‌نامه‌ام با ایشان و در راستای امر آموزش ریاضی شنیده‌ام، اختصاص دهم. این جملات برای من آموزنده بود، باشد که برای دیگران نیز چنین باشد.

کسی می‌تواند در امر آموزش ریاضی موفق باشد که در شاخه‌های مختلف ریاضیات تسلط نسبی داشته باشد. زیرا مثلاً وقتی بخواهد به اهمیت روش مور در توپولوژی که یک روش منطقی در آموزش توپولوژی است، بپردازد باید در زمینه‌ی توپولوژی اطلاعات نسبی داشته باشد. یا بخواهد در مورد اهمیت اثبات‌های مختلف برخی از نتایج ریاضی و مقایسه آنها با هم بپردازد، باید خود بر این اثبات‌ها تسلط داشته باشد. افرادی نظیر پولیا، گلفاند و هاردی پس از سالها کار در زمینه‌ی تخصص خود به آموزش ریاضیات روی آوردند و افراد موفقی در زمینه‌ی آموزش ریاضی شدند.

بهره‌گیری از ICT در برنامه‌ی درسی همواره یکی از برنامه‌های آموزشگران آموزش ریاضی بوده است. زیرا اولاً: کسانی که به تولید محتوای آموزشی و نرم‌افزارهای کمک درسی می‌پردازند، از سواد موضوعی کافی در زمینه‌ی ریاضیات، روانشناختی تربیتی در آموزش ریاضی و مباحث فراشناخت بی‌اطلاع بوده و نرم‌افزارهای تولید شده، همان سبک و سیاق انتقال دانش را ادامه می‌دهد. ثانیاً: آموزشگران ریاضی و کارشناسان مباحث تربیتی و آموزشی نیز از سواد نرم‌افزاری کافی جهت طراحی بهینه‌ی نرم‌افزار مطابق با استانداردهای رایج برخوردار نیستند. حال سؤال این است که دستاوردهای ICT برای آموزش ریاضی چیست؟ و چرا ما به دنبال بهره‌گیری از ICT در کلاس‌های درس ریاضی هستیم؟

۱- یادگیری از طریق بازخورد سریع: دریافت بازخورد سریع از رایانه و مشاهده‌ی بلافاصله‌ی

اثر تغییرات اعمال شده بر خروجی نمایش داده شده در نمایشگر، فرصت فرضیه‌سازی و بررسی فرضیه‌های ساخته شده را برای دانش‌آموزان فراهم می‌کند. ضمن آنکه صحت پاسخ‌های بدست آمده برای یک مسأله، توسط رایانه به راحتی آشکار خواهد شد. در بررسی درستی فرضیه‌های ساخته شده توسط دانش‌آموزان، در محاسبات مربوط به مسائل ترکیبیاتی با مقادیر بالا، پیمایش گراف و بهینه‌سازی با توجه به تمام جواب‌های ممکن مسأله و غیره، تفاوت‌های استفاده از *ICT* و عدم استفاده از آن به خوبی قابل درک است.

۲- مشاهده الگوها: تغییرات متوالی، منظم و کنترل شده بر روابط ریاضی از قبیل معادله یک تابع و مشاهده رفتار آن در صفحه، جایگذاری مقادیر مختلف عددی در یک فرمول و بررسی نتایج حاصله از آن و غیره، می‌تواند الگوی نهفته در اشیا و اشکال ریاضی را آشکار سازد و دانش‌آموزان را به سمت تعمیم دادن صحیح احکام ریاضی، هدایت کند. الگوهای عددی بدست آمده توسط ماشین حساب و کشف روابط حاکم بر اعداد از ابتدایی‌ترین این موارد است. رایانه با تأثیر دادن بلافاصله تغییرات بر خروجی نمایش داده شده و یا با در کنار هم قرار دادن نتایج متعدد حاصل شده از تغییرات، درک و کشف الگوهای ریاضی را میسر و آسان می‌سازد. بطوریکه ذهنیت استقرایی بوجود آمده از بکارگیری *ICT*، بطور محسوسی، قابل اعتمادتر از انواع مشابه خود می‌باشد.

۳- کار با تصاویر پویا: به تصویر کشیدن ایده‌ها و تصورات ذهنی دانش‌آموزان جهت بررسی صحت آنها و یا داشتن درک درست‌تر و بهتر نسبت به موضوع، بخصوص در هندسه، با کمک رایانه‌ها به راحتی در دسترس است. حجم‌ها، تقارن‌ها، معادلات خطوط و سهمی‌ها، انتقال‌ها و بردارها به راحتی شبیه‌سازی شده و رایانه با انجام محاسبات لازم برای هر مرحله، به حذف حاشیه‌های غیر ضرور پرداخته و دانش‌آموز را متوجه هدف اصلی موضوع درسی می‌کند. ضمن آنکه مواردی از قبیل دوران یک شکل مسطح حول یکی از اضلاعش و ساختن اجسام حجم‌دار، تقاطع مخروط و صفحه با زوایای مختلف و بررسی مقاطع مخروطی و غیره، بدون استفاده از رایانه، با دشواری بسیاری روبرو بوده و بعضاً غیرممکن است و لذا می‌توان یاری رساندن به تصویرسازی ریاضی در ذهن دانش‌آموز را نیز از دستاوردهای *ICT* دانست.

فصل ۱

تکنولوژی در ریاضیات

۱.۱ مقدمه

پژوهش‌های محققان برای استفاده از تکنولوژی در زمینه‌های مختلف آموزش ریاضیات در حدود دو دهه است که مورد توجه قرار گرفته است (کاپوت، ۱۹۹۲، هید، ۱۹۹۷)^۱. شواری ملی معلمان ریاضیات اهمیت زیادی بر بکارگیری تکنولوژی در کلاس درس ریاضیات داده است. این شورا بیان می‌کند که تکنولوژی و به‌خصوص کامپیوترها در درست بودن حالت‌های مختلف برای تدریس هندسه در مدارس مورد استفاده هستند. در واقع این ابزارها یک محیط یادگیری پویا برای توسعه‌ی تفکر هندسی دانش آموزان فراهم می‌کنند (NCTM، ۲۰۰۰). یک تعریف واقعی از ریاضیات شاید "یک علم جستجو کننده‌ی الگوی ساختارهای بغرنج و پیچیده" باشد. این تعریف حاوی یک پیام برای ریاضیدانان است، کسانی که در تلاش برای همکاری و مشارکت برای ریاضیات به عنوان علم ناب و آموزش دهنده ریاضیات هستند و افرادی که در جستجوی روشهای نوین برای تدریس و یادگیری ریاضیات هستند. کامپیوتر و تکنولوژی یکی از موضوعات قوی بحث شده در انجمن آموزش ریاضی هستند. باید فکر و اندیشه‌ی کامپیوترها را طوری گسترش داد که شامل دیگر بخش‌های مرتبط باشند. در انجمن

^۱Kaput, Heid

آموزش ریاضی یکی از موضوعات مورد توجه و به اتفاق نظر رسیده بحث درباره‌ی تکنولوژی بوده و اینکه کامپیوتر به تنهایی برای هر تغییر، قابل استفاده نیست و نیاز به یک بحث پداگوژیکی قوی دارد. به بیان دیگر استفاده از تکنولوژی برای تدریس در کلاس هنوز یک تصمیم است و از دید معلمان و دانش‌آموزان به عنوان یک چشم انداز باز آموزش ریاضیات می‌باشد (بوربا^۲، ۲۰۰۶).

۲.۱ بکارگیری تکنولوژی در تدریس و یادگیری ریاضیات

در نهمین کنفرانس *ICMI*^۳، یازده گروه به بررسی این مسأله پرداختند. در این کنفرانس پروفیسور فوجیتا^۴ با یک سخنرانی جامع تأکید کرد، بر اینکه چهارمین قله‌ی تاریخ ریاضیات مقدمه‌ای بر کامپیوترهاست و اینکه آموزش ریاضی باید بطور خاصی در هندسه شرح داده شود. به عنوان مثال در فرانسه تأکید زیادی بر استفاده از ماشین حساب و کامپیوتر در تمام سطوح مدارس در برنامه آموزشی می‌شود. ضمن آنکه وزارت آموزش و پرورش در استفاده از تکنولوژی برای تدریس حمایت می‌کند. اما برخی معلمان و دانش‌آموزان به دلیل اینکه استفاده از تکنولوژی را صرفاً فشار دادن برخی دکمه‌ها می‌بینند و برای آنها تفکر بزرگی در آن وجود ندارد مخالف با استفاده از تکنولوژی می‌باشند. زیرا آنها بیان می‌کنند، ریاضیات علمی است که فقط به استفاده از هوش و یک خودکار و کاغذ نیاز دارد. اما با توجه به این عقیده و احترام گذاشتن به این طرز فکر بیان می‌کنیم که مقاله (کاغذ) و خودکار نیز یک تکنولوژی است، ولی به دلیل شایع بودن آن در این قرن بصورت کامل درک نشده است و باید نوع تکنولوژی خود را تغییر دهیم.

براساس یافته‌های پژوهشگرانی همچون (ناس، هوپلس، ۱۹۹۶ و جونز، ۱۹۹۹)^۵ ایراد تکنولوژی در دو روش زیر و انجام آنهاست:

۱- روش انجام دادن و کاربرد ریاضیات؛

^۲Borba

^۳The International Commission on Mathematical Instruction

^۴Pr. Fujita

^۵Nas, Hoyles, Jones

۲- روش یادگیری براساس ساختار دانش جدید.

یک مثال کاملاً روشن کننده استفاده از وسایل مختلف در کشوری چون ژاپن است. شخصی به نام سوربان در تحقیقات خود به استفاده از استراتژی‌های توسعه یافته توسط دانش‌آموزان ژاپنی بدون آموزش اشاره می‌کند. در واقع دانش‌آموزان ژاپنی برخی محاسبات برای واحدهای ۵ (۵، ۵۰، ۵۰۰...) را به محاسباتی ذهنی تبدیل کردند.

DGS ۳.۱

دسترسی به مجموعه‌ای از ابزارهای قوی کامپیوتری به نام *DGS* در کلاسهای ریاضیات مفاهیم زیادی را روشن می‌کند. *DGS* یک محیط قوی غیر جسمانی با حوزه معنایی از فضا و زمان پیشنهاد می‌کند، بطوریکه مفاهیم کلیدی هندسه در آن می‌توانند به عنوان پایه در نظر گرفته شوند.

DGS برای دو کار عمده طراحی شده است:

- ۱- توانایی کشیدن موضوعات بطور دینامیکی و با مهارت خاص ؛
- ۲- کنترل عینی.

تعریف آینده‌ی *DGS* بیشتر عمل "کشیدن" می‌باشد که می‌تواند پاسخی دینامیکی به تغییر شرایط بدهد (گولدنبرگ، کوکو، ۱۹۹۸)^۷. این جنبه‌ی *DGS* فرضیه‌سازی را آسان می‌کند و دانش هندسی را به استنتاج نزدیک می‌کند. به عنوان مثال دانش‌آموزان می‌توانند برای تعمیم فرضیات خود چندین نمونه برهان ارائه بدهند (کاپوت، ۱۹۹۲). علاقه زیاد به *DGS*، برای دانش‌آموزان شرایطی را بوجود می‌آورد که تصور بد، از درستی ماهیت ریاضیات را از بین می‌برد. بطوریکه درستی یک فرضیه برای چندین نمونه، درستی موضوع را تأیید می‌کند (آلن، چازن، هویلس، جونز، لابورد)^۸. هویلس و جونز اشاره می‌کنند: هنگامی که دانش‌آموزان شواهد تجربی خود را بیان می‌کنند، انگیزه‌ی بیشتری برای بحث منطقی و تولید اثبات پیدا می‌کنند. اما از طرفی اشاره دارند که استفاده از *DGS* ممکن است فعالیت ریاضیات را برای بیشتر بحث‌های تجربی و الگوی در نظر گرفته شده محدود

^۷Goldenberg, Cuoco

^۸Alen, Chazan,

کند. در واقع این انگیزه با کشیدن بوجود می‌آید، اما برخی محققان معتقدند که تنش و فشاری بین اثبات و کشف تجربی نیست.

دی ویلیرز^۹ (۱۹۹۸) برای یک فعالیت ریاضی می‌گوید: "کشف با *DGS* در کنار استنتاج به اثبات معنی بیشتری می‌دهد".

مثال ۱.۳.۱. اگر A و B و C نقاط روی دایره باشند و خط AC ، قطر دایره باشد آنگاه زاویه ABC یک زاویه قائمه خواهد بود. به بیان دیگر مرکز دایره محیطی یک مثلث روی یکی از اضلاع مثلث قرار می‌گیرد اگر و تنها اگر آن مثلث قائم‌الزاویه باشد (شکل ۱.۱).

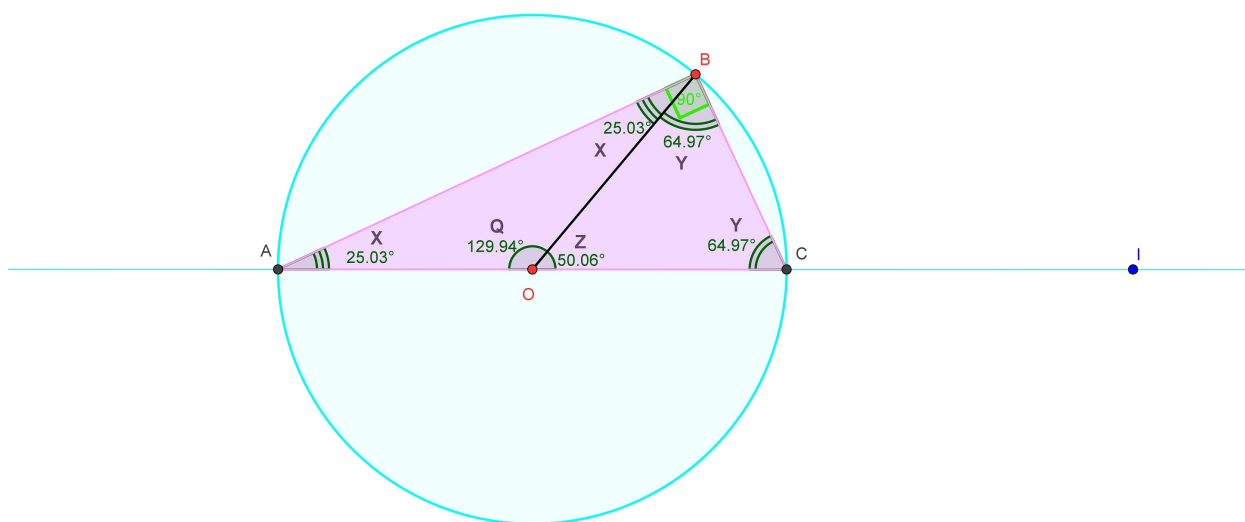
اثبات: فرض کنیم O مرکز دایره باشد. بنابراین $OA = OB = OC$. به این ترتیب OAB و OBC مثلث متساوی‌الساقین خواهند بود. در نتیجه زوایای $OCB = OBC$ و $BAO = ABO$. فرض کنیم $Y = BAO$ و $X = OBC$ ، چون جمع زوایای داخلی مثلث برابر ۱۸۰ درجه است پس $۲X + Q = ۱۸۰$ و $۲Y + Z = ۱۸۰$. همچنین میدانیم $Z + Q = ۱۸۰$. حال اگر دو رابطه اول را با هم جمع و رابطه سوم را از آنها کم نماییم خواهیم داشت: $۲X + Q + ۲Y + Z = ۱۸۰ + ۱۸۰$. که در نتیجه داریم $X + Y = ۹۰$.

DGS برخی روشهای قیاسی و تجربی را بررسی می‌کند که در فعالیتهای ریاضیدانان زیاد به چشم نمی‌خورد. درستی ساختارها در *DGS*، برخی فرضیات را براساس تصویر به اثبات می‌رساند (بوتانا، وال کارس، ۲۰۰۲)^{۱۰}. یافته‌های محققان نشان می‌دهد که *DGS* نقش مهمی در توانمند کردن دانش آموزان با توسعه‌ی دلیل قیاسی دارد (هادس، هیلالی، هویلس، جونز، ماریوتی، مارادز، گوتیرز، ۲۰۰۰)^{۱۱}. تحقیقات نشان دهنده‌ی مفید بودن محیط *DGS* برای مرحله‌ی درستی، نسبت به توضیح و کشف است. در اغلب مثال‌ها توضیح و کشف نیاز به مداخله‌ی معلم دارد، که به دانش‌آموزان در درستی روابط کمک می‌کند. دانش‌آموزان رغبت بیشتری به استفاده از بحث تجربی نسبت به دلیل استقرایی دارند. بنابراین درست است که بگوییم یک محیط پویا ساختار فعالیت

^۹De Villiers

^{۱۰}Botana, Valcarce

^{۱۱}Mariotti, Marrades, Gutierrez, Hadas



شکل ۱.۱: مثال

دانش‌آموزان یا فهم اثبات را پرورش می‌دهد. ادوارد^{۱۲} (۱۹۹۷) اشاره می‌کند که اثبات یک قضیه اغلب کار مشکلی است که معلمان ریاضیات باید به دانش‌آموزان برای این کار راهنمایی لازم را بدهند.

هویلس و جونز (۱۹۹۸) بیان می‌کنند که طراحی فعالیت‌های جدیدی که دانش‌آموزان را برای ساخت ارتباط بین دلیل تجربی و استقرایی حین بررسی یک مسأله توانمند کند، مهم می‌باشد. فهم مسائل ریاضیات و هندسی با جایگزین کردن تصاویر پویا با تصاویر ساکن بر روی کاغذ، نیاز به اثبات مفاهیم ندارد. پس تکنولوژی باید به عنوان روشی که فرآیند شناخت و تأیید (درستی) را با هم می‌آورد، بکار برده شود و در نتیجه به سوی یک اثبات و توضیح رسمی هدایت می‌شود. اما کسی نمی‌تواند ادعا کند که استفاده از نرم‌افزار پویا در بررسی فرضیات هندسی، لزوماً برای تغییر به بهترین حالت می‌باشد.

^{۱۲}Edward

۴.۱ تجسم فکری و کشف در ریاضیات با استفاده از نرم افزار

تجسم فکری امروزه با استفاده از نرم افزار پویا، دانش آموزان را توانمند می کند برای دیدن و کشف مفاهیم و روابط ریاضیات، که در گذشته پیش از بوجود آمدن تکنولوژی برای نمایش سخت بودند. اکثر بررسی های محققان بر روی تکنولوژی آموزشی در آموزش نشان داده است دانش آموزانی که از تکنولوژی در یادگیری خود استفاده می کنند دقت و درستی بیشتری در نتایج یادگیری خود بدست آورده اند تا دانش آموزانی که بدون تکنولوژی این یادگیری را کسب کرده اند (واکسمن، کونل، گرای، ۲۰۰۰)^{۱۳}.

با وجود روشهای مرسوم تدریس (کتاب درسی، نکته های درسی، نوشته ها، دست نوشته ها، تکالیف درسی و مشق شاگران، امتحان پایانی) تلاش بر این است که با برخی تغییرات در روشهای تدریس براساس این نرم افزارها یادگیری دانش آموزان را بهبود بخشید. هدف این است که با استفاده از نرم افزار یک محیط مناسب برای کشف ساختارهای ریاضی با نمایش های چندگانه فراهم کنیم، یا با نشان دادن تعدادی مفاهیم ریاضی به دانش آموزان که انجام آنها با قلم و کاغذ ممکن نیست، بر یادگیری آنها بیفزاییم.

ما به عنوان آموزش دهنده، باید تکنولوژی را در درون روشهای آموزش معلمان، با در نظر گرفتن نیازهای آموزشی معلمان آینده قرار دهیم، بطوریکه آنها بتوانند تجربیات یادگیری را براساس تکنولوژی، برای دانش آموزان ارائه دهند. زمانی که روش استفاده از تکنولوژی را بدانیم و مطمئن نباشیم که با تدریس از طریق تکنولوژی فهم ایجاد می شود، حقیقتاً معرفی تکنولوژی یا تدریس مدلسازی با نیروی تکنولوژی برای تدریس و یادگیری ریاضیات مناسب نیست. تجربیات یادگیری معلمان آینده مانند یک دانش آموز، تأثیر بسزایی بر روی تصمیم های آموزشی آنها دارد و این مهم برای تغییر دیدگاههای معلمان پیش از خدمت برای تدریس و یادگیری آنها آسان بدست نمی آید (دیسکی، کیم، ژاکوبسکی، آندسپکتور، ۲۰۰۸)^{۱۴}. اگرچه استفاده از محیط های یادگیری پویا ماهیت یادگیری و طراحی آموزشی ریاضیات را تغییر داده است، اما نقش معلمان و بخصوص آنهایی که از تکنولوژی استفاده نمی کنند اهمیت زیادی دارد تا آنجا که آموزش معلم را مورد توجه قرار می دهد (میشرا،

^{۱۳}Waxman, Connell, Gray

^{۱۴}Dickey, Kim, Jakubowski, Andespector

کهلر^{۱۵}.

در طی سالهای گذشته، مطالعات زیادی برای بهتر کردن تجربه‌ی تدریس معلمان آینده در کلاس‌هایشان ارزیابی شده بود (اسمیت، ۱۹۹۱، زیچر، ۲۰۰۲)^{۱۶}. امروزه معلمان آینده به ندرت با اساتید دانشگاهی کار می‌کنند و برای تدریس و تصمیم‌های آموزشی بیشتر توسط همکارانشان راهنمایی می‌شوند.

۵.۱ دسته‌بندی نرم‌افزارهای ریاضیات

از میان دسته نرم‌افزارهایی که قابل دسترس برای تدریس و یادگیری ریاضیات‌اند، دو نمونه‌ی برجسته یکی سیستم‌های کامپیوتر جبری (CAS^{17})، که کانون آن بر کاربرد عبارت‌های نمادی و دیگری نرم‌افزار پویای هندسه (DGS)، که بر روی روابط بین نقاط، خطوط، دایره و بخش‌های مخروطی متمرکز است) مورد توجه هستند.

از مهمترین نمونه‌های CAS دو نمونه‌ی *Derive* و *Maple* هستند و بهترین نمونه‌های DGS ، *Sketchpad* و *Cabri* هستند. هر دوی این نمونه نرم‌افزارها طی این سالها توسعه یافتند. نمونه‌های CAS دارای قابلیت‌های گرافیکی برای کمک به تجسم ریاضیات‌اند و همچنین DGS برای اجزاء نمادین جبری و دامنه‌ی وسیعی از ریاضیات مفید می‌باشد.

در چند سال اخیر نرم‌افزار جئوجبرا توسعه یافته است که یک ارتباط منظم و یک نمایش را بین قابلیت‌های نمادین از CAS و قابلیت تعریف پویایی از DGS فراهم می‌کند. در واقع این نرم‌افزار نه تنها به طور تابعی DGS (جایی که کاربر می‌تواند با نقاط، خطوط، بردارها، اضلاع، اشکال هندسی و بخش‌های مخروطی کار کند) قابل استفاده است بلکه شامل CAS نیز می‌باشد (نظر به اینکه برابری‌ها و مختصات می‌تواند مستقیماً وارد و توابع بصورت جبری تعریف شوند و سپس بصورت پویا تغییر کند).

^{۱۵}Mishra, Koehler

^{۱۶}Smith, Zicher

^{۱۷}Computer Algebra system

سنکونین تأکید بر فرصت‌های جدیدی از یک DMS برای آموزش دوباره ریاضیات داد (سنکونین^{۱۸}، ۲۰۰۰). اما لزوم ترکیب نرم افزار پویای هندسه (DGS) و سیستم جبری کامپیوتر (CAS) به داخل یک DMS ^{۱۹} در سال ۲۰۰۵ توسط دکتر مارکوس هوهن وارتر^{۲۰} نمایش داده شده بود.

۶.۱ اثبات و نرم افزار برای آموزش معلمان

اثبات در قلب ریاضیات قرار دارد تا آنجا که می‌دانیم در آموزش ریاضیات اثبات یک مفهوم و روش مفید برای بسیاری از دانش آموزان ریاضی است. اما سئوالی که ایجاد می‌شود این است که آیا مقدمه‌ی سیستم‌های هندسه‌ی پویا، موقعیت اثبات را بهتر می‌کند، یا گذاری از اثبات غیررسمی به رسمی در ریاضیات می‌باشد و بلکه سخت‌تر؟ چگونه روش‌های تدریس نو با کمک کامپیوترها برای توسعه و پیشرفت در یک چارچوب مفهومی برای اثبات و نزدیک به اثبات، به عنوان وسیله‌ای برای روشن کردن ایده‌های هندسی به دانش آموزان کمک خواهد کرد؟ آیا کامپیوتر می‌تواند بطور کامل برای هرگونه اثبات جایگزین شود؟

اما استفاده از نرم افزار ریاضیات در آموزش معلمان پیش از خدمت برای آماده سازی دانش آموزان از دو جنبه قابل بررسی خواهد بود:

۱- استفاده از نرم افزار ریاضیات به عنوان یک حامی برای آموزش معلمان پیش از خدمت؛

۲- آماده سازی معلمان پیش از خدمت برای استفاده از نرم افزار ریاضی در تدریس آنها.

همچنین برای برنامه‌های نرم افزار ریاضیات دو موضوع بحث خواهد شد:

۱- کاربرد و استفاده‌ی نرم افزار ریاضی برای تدریس ریاضی در برنامه‌های آموزش و پرورش؛

۲- انواع مختلف نرم افزارهای ریاضی طراحی شده با توجه به استفاده‌ی کاربردی آنها در تدریس ریاضی.

آماده کردن معلمان آینده برای بکارگیری مناسب از تکنولوژی در تدریس، یکی از موضوعات اصلی

^{۱۸}Sanckvin

^{۱۹}Dynamic Mathematic system

^{۲۰}Markus Hohenwarter

در آموزش معلمان پیش و پس از خدمت ریاضیات است. استفاده‌ی مناسب از نرم‌افزار در تدریس می‌تواند به تدریس و یادگیری ریاضیات کمک کند. نرم‌افزار ریاضی از یک طرف می‌تواند وسیله‌ای برای بکارگیری دانش ریاضی و فراگیری اینکه چگونه دانش ریاضیات می‌تواند مورد استفاده باشد، از طرف دیگر کمک با ارزشی به توسعه‌ی مناسب مفاهیم ریاضیات می‌کند.

TAO ۷.۱

یک اصطلاح فرانسوی برای برگزاری آزمون هماهنگ (کامپیوتر و آزمون، کامپیوتر براساس آزمون و آزمون‌های کامپیوتری) است. در واقع TAO بیان‌کننده‌ی یک معمار باز و جامع برای کامپیوترهاست. این آزمون راهی به سوی توسعه‌ی آزمون و یک کارنامه‌ی علمی برای فعالیت‌های دانش‌آموزان با یک نتیجه‌ی ساده است. کارهای تحقیقی برای این آزمون با توجه به دانش‌آموزان علاقمند در مدارس از لوکزامبورگ با توجه به روش رسم هندسی در کنار تلفیق واحدهای درسی و تجربه‌های دیگران بر روی کامپیوتر انجام شده است.

۸.۱ گزارش تیمز: TIMSS

باتوجه به گزارش‌های TIMSS موفقیت دانش‌آموزان بصورت مستقیم وابسته به دو مورد زیر است:

۱- استفاده‌ی مکرر از ماشین حساب و کامپیوتر (هفتگی یا روزانه)؛

۲- استفاده از ماشین حساب و کامپیوتر هنگام آزمون‌های تیمز.

آنها اظهار داشتند که دانش‌آموزان، کسانی هستند که بیشترین استفاده را از ماشین حساب و کامپیوتر می‌برند (در طول آزمون‌های تیمز) و بهترین عملکرد را بر روی آزمون‌ها دارند. برای این محققان هنوز به طور کامل روشن نشده است که آیا استفاده از ماشین حساب و کامپیوتر به عملکرد دانش‌آموزان کمک می‌کند یا آنها را بیشتر توانمند می‌کند.

۹.۱ نقش تکنولوژی جدید بر یادگیری ادراک

امروزه ارتباط بین دانش تئوری و استفاده از وسایل جدید آموزشی و پژوهشی امری اجتناب‌ناپذیر است و این امر به دلیل قرار گرفتن تکنولوژی در آموزش و پژوهش جدید است، که در اصطلاح آنها را تکنولوژی‌های ادراکی می‌نامند. توسعه‌ی این ارتباط موجب خارج شدن مکانیکی دستورالعمل‌های جهان مادی با ریاضیات انتزاعی می‌شود.

توسعه‌ی مداوم معلمان ضمن خدمت یک مؤلفه‌ی اساسی برای اصلاحات آموزشی است که با تنوع و نتایج ثابتی از تکنولوژی آموزشی و نمونه‌های جدید آموزش بدست آمده است (دارلیگ، هامند، ۲۰۰۰)^{۲۳}.

یادگیری تکنولوژی‌های جدید پویای بازکد یک سطح فکر برای اجرای ساختار اصول اولیه فراهم می‌کند (مریل^{۲۴}، ۲۰۰۵). افرادی همچون (دی جانگ، ون جولین، میلارد، اسپکتور، داویدسن و سیل)^{۲۵} کسانی هستند که در شبیه سازی و طراحی این اصول ساختاری با یک ساختار مدل - مرکزی موافق بودند. یکی از این اصول به معلم اجازه می‌دهد که مفاهیم اولیه‌ی ریاضیات با مدل‌های مفهومی پویا را به عنوان یک روش یادگیری با پرورش فراشناخت تدریس کنند. امروزه در کلاس درس معلمان بحث درباره تکنولوژی‌های جدید با تلاقی تعدادی از چالش‌های آموزشی و تکنیکی سهم بسزایی در پیشبرد اهداف آموزشی از طریق تکنولوژی دارد.

^{۲۳}Darlig, Hammand

^{۲۴}Merrill

^{۲۵}De Jong, Van Jolingen, Milard, Spector, Davidsen, Seel

۱۰.۱ یک چارچوب مفهومی برای کاربرد تکنولوژی: تأثیر پداگوژیک

یکی از وظایف اصلی هر برنامه‌ی آموزشی که معلمان باید بر مبنای آن تدریس هندسه انجام دهند، انتخاب فعالیت‌های مناسب تفکر است، که محتوای آنها تدریس و پایه‌ی دانش‌آموزان می‌باشد. چارچوب‌های جدید همگی اسنادی هستند که طی سالهای اخیر با ارزیابی کیفیت کاربردهای تکنولوژی گوناگون، این کار را توسعه داده بودند.

مهارت‌ها و دانش معلمان به عنوان دانش محتوایی و دانش ریاضیاتی پداگوژیکی برای تدریس در کلاس به طور متقابلی مؤثر است (بال، مک دیارمید، هیل، اسچیلینگ، شولمن، اسودر، فیلیپ، آرمسترانگ، اسچاپل) ^{۲۶}.

مدلی ^{۲۷} در سال ۱۹۸۷ اشاره می‌کند که توانایی معلمان از هر جهت بر تمارین آموزشی آنها برای برنامه‌ریزی و به عنوان کمک دهنده‌ای که بخوبی فعالیت‌های معلمان را با دانش‌آموزان در طول کلاس انجام می‌دهد، مؤثر است. و بر تجربیات دانش‌آموزان در کلاس و توسعه‌ی شناختشان می‌افزاید. افرادی چون بال، مک دیارمید، کارپنتر، کنپ، کهلر، گروز و سیمون ^{۲۸} نیز بر این یافته صحنه می‌گذارند. معلمان براساس دانش و مهارت خود برای بکارگیری کاربردهای مناسب تکنولوژی که پیش زمینه‌ای برای تفکر در یک موضوع هندسی از سوی دانش‌آموزان باشد، تصمیم می‌گیرند. بنابراین باید یک چارچوب مناسب را به عنوان یک ابزار برای تصمیم‌گیری معلمان انتخاب کرد که کاربردهای پویا در انجام یک فعالیت فعال به عنوان یک برنامه‌ریزی خاص مشخص شود.

تحقیق در آموزش ریاضی با تکنولوژی برای کمبود ارتباط مفهومی نقد شده است و نتیجه به صورت یک مجموعه از مطالعات و توصیف آنها بررسی می‌شود (کهلر، میشر، ۲۰۰۰). کهلر و میشر یک چارچوب مفهومی از محتوای دانش پداگوژیکی با عنوان *TPACK* ارائه دادند. براساس دانش محتوایی پداگوژیکی شولمن ^{۳۰} (۱۹۸۶) این چارچوب تأکید عمده‌اش ترکیب تدریس و تکنولوژی است [۳۱]. پیرسن ^{۳۱} (۲۰۰۱) نشان می‌دهد که تهیه‌ی تکنولوژی با یک معلم خوب، با

^{۲۶}Ball, Mcdiarmid, Hill, Schilling, Shulman, Sowder, Philip, Armstrong, Schappelle

^{۲۷}Medley

^{۲۸}Carpenter, Knapp, Koehler, Grouws, Simon

^{۳۰}Shulman

^{۳۱}Piersen

دانش محتوایی پداگوژیکی که یک نمونه‌ی آموزشی را بوجود می‌آورد، لزوماً استفاده از تکنولوژی را مشخص نمی‌کند. به عبارت دیگر دانش محتوایی پداگوژیکی (*PCK*) به علاوه‌ی دانش تکنولوژی (*T*) دقیقاً همان (*TPACK*) نیست. میثرا و کهلر بیان می‌کنند: روش استاندارد آموزش و تدریس پیشنهاد می‌کند که معلمان واقعاً نیازمند به تعلیم و تربیت با ابزار تکنولوژی هستند. به صورت اصولی این روش یک دید تکنولوژی است که به نظر می‌رسد مانند یک مهارت، می‌تواند قابل اجرا باشد. تکنولوژی می‌تواند با یک تأیید اولیه با بسته‌های نرم‌افزاری به طور اساسی آموزش داده شود.

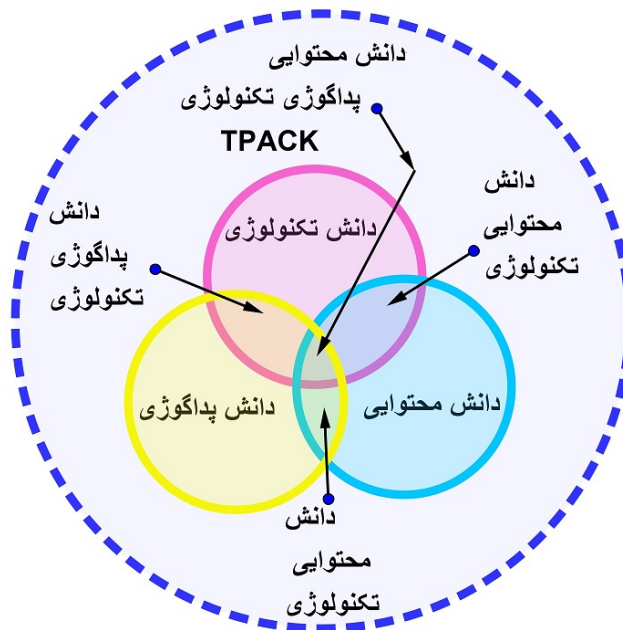
معلمان دبیرستانی کسانی هستند که نقشه‌های درس را با نرم‌افزار پویای ریاضی توسعه می‌دهند. توصیف تجربیات یادگیری مشترک این معلمان بسیار مهم است و به همین خاطر نتایج تحقیقات درباره‌ی استفاده از توانایی‌های نرم‌افزار و دیدشان بر روی تدریس و یادگیری با تکنولوژی و بحث درباره‌ی کاربردهای پداگوژیکی این نتایج مورد توجه محققان، اساتید، دانشجویان و حتی دانش‌آموزان است. معلمان امروزی که ضمن خدمت هستند، برای استفاده از تکنولوژی مهارت لازم را دارند اما تعدادی از آنها دانش محتوایی پداگوژیکی تکنولوژی (*TPACK*) را نمی‌دانند که یادگیری ریاضیات را با تکنولوژی جدید بهتر کنند (نایس^{۳۲}، ۲۰۰۸).

بر این اساس برای استفاده بهتر از نرم‌افزار، معلمان باید دانش پیوسته و خوب از محتوایی که آموخته می‌شود را داشته باشند. اکثر معلمان، ریاضیات را با استفاده از تکنولوژی آموزش نمی‌دهند و رغبت کمی برای این کار دارند (کوبان، کرکاپتریک، پیک، کاپوت، منوچهری، بی بل، آدویر). علاوه بر این مهمترین مسأله درباره‌ی استفاده از تکنولوژی برای آموزش، باورهای معلمان است در این که آیا از آن استفاده کنند، یا نه و چگونه؟ (درییر، روسل، ۲۰۰۳)^{۳۳}. بنابراین یک روش جهت‌دهی آموزش معلم می‌تواند تلفیق باورها و دانش معلمان با توسعه‌ی دانش محتوایی تکنولوژی (*TCK*) آنها باشد. به عبارت دیگر با مجهز کردن معلمان به تجربه یادگیری ریاضیات با تکنولوژی که هر دوی معلم و دانش‌آموزان آن را ندارند، معلمان می‌توانند کشف ریاضیات و اهمیت محیط پویای نرم‌افزار را بفهمند و از طریق معلمان به دانش‌آموزان آموزش داده شود. تا وقتی که استفاده از تکنولوژی برای آموزش ریاضیات به عنوان یک امر واجب، تجربه و نشان داده می‌شود، نمی‌توان کاربرد تکنولوژی

^{۳۲} Niess

^{۳۳} Drier, Russell

را به خوبی ارائه داد. در واقع $TCK \neq TPACK$ (شکل ۲.۱). بنابراین یک روش مفید آن



شکل ۲.۱: چارچوب مفهومی تکنولوژی

است که انواع متفاوتی از تکنولوژی را برای آموزش در نظر بگیریم. این روش اگرچه مانع تفکر عمیق درباره چگونگی استفاده از تکنولوژی است، اما توجه آنها را تقریباً در یک سطح از یادگیری تکنولوژی قرار می‌دهد. در واقع روش یادگیری تکنولوژی، جدا از محتوا و دانش بی‌تأثیر است که بررسی‌های پداگوژیکی بر روی آن انجام شده است.

۱۱.۱ استفاده از تکنولوژی به عنوان یک سازمان‌دهنده و تقویت‌کننده

تکنولوژی‌های شناختی به عنوان مثال آنهایی که به تقویت محدودیت‌های فکری در تفکر، یادگیری و فعالیت‌های مسأله حل کردن کمک می‌کنند، بیشتر موجب تقویت و سازماندهی دوباره یا فعالیت

ذهنی می‌شوند. هنگامی می‌توان گفت تکنولوژی به عنوان یک تقویت‌کننده بکار می‌رود که به طور مؤثری فرایندها و عملیات خسته‌کننده‌ای که بادست انجام می‌شود را با آن انجام داد. استفاده از تکنولوژی خلاصه شده با اصل جعبه‌ی سفید یا جعبه‌ی سیاه^{۳۴} است (بوچ برگر^{۳۵})، به گونه‌ای که دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که ابتدا یک فرآیند را با دست و سپس چگونگی اجرای آن را با استفاده از تکنولوژی بیاموزند. در واقع این کار خود تمرین برنامه‌های نرم‌افزار است که برای آماده‌سازی دانش‌آموزان برای امتحانات استاندارد مناسب است.

افرادی هستند که برخی نرم‌افزارها را بیشتر یک ابزار نمایش تا محاسبه می‌بینند و بنابراین آنها را به عنوان یک ابزار تقویت‌کننده در نظر می‌گیرند. به هر حال استفاده از نرم‌افزار، حل و اثبات برخی مثال‌ها را نشان می‌دهد. به عنوان مثال اثبات قضیه‌ای درباره منصف بودن قطرهای مستطیل و اینکه چرا درست است، به فهم آنها می‌افزاید، اما کانون فکری آنها را کاملاً تغییر نمی‌دهد. از جهتی دیگر به عنوان یک سازماندهی دوباره، تکنولوژی بر فکر دانش‌آموزان بوسیله نمایش‌های نو اثر می‌گذارد و سخت است که کانون شناختی دانش‌آموزان را با تغییر درباره فهم مسأله و زمان مورد نیاز برای محاسبه با ابزارهای تکنولوژی بهتر کرد. در واقع تکنولوژی بازخورد مناسبی برای آنها فراهم می‌کند که در صورت نبود تکنولوژی دسترسی به آن میسر نیست. به عنوان مثال با استفاده از برخی نرم‌افزارها می‌توان هزینه و زمان را کنترل کرد. استفاده از تکنولوژی برای برخی مثال‌ها، فکر دانش‌آموزان را برای برخی روشها دوباره سازماندهی می‌بخشد. استفاده از نمایش پویا برای تقویت فهم دانش‌آموزان از نظر کیفیت، به عنوان یک اثبات سیستمی، توانایی خاصی دارد که مفاهیم مهم ریاضیات را به شکل‌های مختلف نمایش می‌دهد. و می‌تواند به دانش‌آموزان کمک کند که به عنوان مثال تابع را به عنوان یک رابطه‌ی بین کیفیت‌های متغیر، با مفهوم یک تابع خطی، ارتباط دهند و این نمایش بصورت گرافیکی می‌باشد (چازن، ۲۰۰۰، ۱۹۹۹). اما ارتباط بین نمایش یک وضعیت و نمایش تابع ریاضیاتی در یک محیط پویا سخت به نظر می‌رسد (نازان، کینستچ، یانگ، ۱۹۹۲)^{۳۶}. از نظر کاپوت (۱۹۹۲) هم اهمیت ارتباط بین آنها به عنوان یک نمایش اولیه‌ی نرم‌افزاری است، که فعالیت‌ها را به درون یک نمایش سیستمی می‌برد. و دانش‌آموزان فرصت‌هایی برای ارتباط

^{۳۴}white box/black box

^{۳۵}Buchberger

^{۳۶}Nathan, Kinstch, young

وضعیت‌های که در محیط نرم‌افزار نمایش یافته است، می‌یابند.

فصل ۲

برخی نرم افزارها

۱.۲ مقدمه

از سال ۱۹۹۰ به بعد محققان در دانشگاه *UtahState* برای تدریس و یادگیری ریاضیات شروع به کار و ساخت ابزارهای مؤثر کردند. و در اینجا از هندسه دانان اسکتچپد به عنوان یک بخش کارگاهی برای معلمان، ضمن توسعه‌ی ابزارهای *CD* اساس با حمایت تدریس جبر دانشگاهی استفاده کردند. در سال ۱۹۹۹ محققان یک امتیاز مهم از یافته‌های ملی علوم با توسعه‌ی کتابخانه‌ی ملی (*NLVM*^۱) بدست آوردند، و مجموعه‌ای از ابزارهای مؤثر ریاضیات را به طور آزاد بر روی اینترنت در دسترس همگان گذاشتند. در این سالها بود که تلاش‌های متمرکز و پیوسته برای توسعه‌ی *Javaapplet* های ریاضی وار صورت گرفت، بطوریکه بتواند برای کاربران در سیستم‌های مختلف مورد استفاده باشد. در مجموع *NLVM* شامل اطلاعات اولیه برای معلمان است و کمک می‌کند به چگونگی استفاده از این ابزارها و فعالیت‌ها و بیان اینکه این ابزارها چگونه مورد استفاده قرار می‌گیرند. همچنین در کنار *NLVM* محققان با ناشران و اساتید و شرکت‌های مهم در ارتباط هستند که از ابزارهای *NLVM* با کتابهای آموزش ریاضی و هنرهای آزاد استفاده کنند.

^۱National Library of virtul Foundation

Geometer – Sketchpad ۲.۲

برخی از محققان بر روی نرم‌افزار *Sketchpad* به عنوان یک نرم‌افزار مشابه با *Cabri* مطالعه می‌کنند که این نرم‌افزار بر روی سطوح استدلال دانش‌آموزان کار می‌کند. این محققان نقش‌های متفاوت این نرم‌افزار را در یادگیری هندسه مطالعه کردند (المقدادی، ۲۰۰۰، چوییکه، ۱۹۹۹، مک کلین تک، جیانگ، جولای، ۲۰۰۲، هانافین، ۲۰۰۴)^۲، و نشان دادند که *Sketchpad* تأثیر مثبت بر روی کیفیت استدلال هندسی دانش‌آموزان دارد. پروژه کار این نرم‌افزار هندسی به قبل از ۱۹۸۰ بر می‌گردد که کار آن توسط دکتر ایوجین کلوتز^۳ و دوریس اسچات اسچنیدر^۴ هدایت می‌شد. این پروژه و طراحی آن به عنوان یک دست یافته‌ی ملی علوم شناخته شد. چرا که به عنوان یک پروژه‌ی ریاضیاتی، محتوای تدریس هندسه را با استفاده از تکنولوژی توسعه می‌داد. اما شخصی به نام نیکلاس ژاکیو^۵ به صورت رسمی این پروژه را توسعه داد و به شکل نرم‌افزار امروزی نمایش داد. روش تدریس نرم‌افزارهای پویای ریاضیات تفاوت بالایی را در یادگیری و فهم دانش‌آموزان و حتی دانشجویان نسبت به روش سنتی ایجاد می‌کند و توانایی معلمان را برای نشان دادن مفاهیم ریاضیات بالا می‌برد. برای دستیابی به این اهداف نرم‌افزارها باید بصورت ریاضیاتی، دقیق و آسان برای استفاده و براساس پداگوژی طراحی شوند.

۳.۲ یک تقسیم‌بندی خاص برای تدریس کتابهای درسی با استفاده

از Sketchpad

برخی برنامه‌های آموزشی با چندین زیر برنامه‌ی منتشر شده وجود دارند، که کمکی برای معلمان باشد تا بتوانند به آسانی یک ضمیمه برای محتوای روش تدریس براساس فعالیت‌های *Sketchpad*

^۲ Almeghdadi, Mack Cleintak, Jeiang, July, Hanafin

^۳ Eugene Klotz

^۴ Doris Schattschneider

^۵ Nicholas Jackiw

داشته باشند. به هر حال یک تقسیم بندی برای کار Sketchpad براساس موضوعات ریاضیات که نسبتاً جزئی می باشد وجود دارد و آن بکارگیری Sketchpad در بخش های زیر می باشد:

۱- کشف در هندسه: فعالیت هایی برای دانش آموزان به عنوان اینکه آنها تصاویر هندسی را می سازند، دستکاری می کنند و روابط بین آنها را کشف می کنند با فعالیت هایی که مفاهیم هندسه ی دبیرستانی را می پوشانند. فعالیت هایی شامل: خطوط، زوایا، مثلث ها، چهارضلعی ها، چند ضلعی ها، دوائر، مساحت، قضیه ی فیثاغورث، تشابه.

۲- کشف در جبر ۱: نمایش و فعالیت هایی که به کشف موضوعات جبر ۱ کمک می کند شامل: نسبت و توان، عبارت های جبری، معادلات خطی و درجه ی دوم.

۳- کشف در جبر ۲: نمایش ها و فعالیت هایی که به موضوعات جبر ۲ می پردازد. فعالیت هایی شامل توابع و روابط بین آنها، توابع درجه ی دوم، توابع مثلثاتی، بردار و ماتریس، توابع خاص، دستگاه معادلات.

۴- کشف در پیش حساب: فعالیت هایی که دانش آموزان به طور مستقیم با تجسم و دستکاری تجربه می کنند و برای هفته های اول حساب می باشند.

۵- کشف در حساب: فعالیت هایی خاص برای درس حساب دانش آموزان که مفاهیم اساسی را پوشش می دهد شامل تغییر، حدود، مشتق، دیفرانسیل، انتگرال.

۶- توسعه ی استدلال هندسی: ترسیم اشکال در microworld با یک سری کشفیات همراه است که هر کدام از دانش آموزان مدل های ذهنی پویا درباره اشکال هندسی و خواص آنها پیدا می کنند، که خود این عمل موجب تفکر ریاضیاتی می شود. این خط کار اغلب فعالیت هایی برای دانش آموزان مدارس متوسطه خواهد داشت و شامل چهارضلعی ها و مثلث ها و توسعه برای فعالیت های بالاتر. ۷- فعالیت های هندسی برای دانش آموزان متوسطه: این خط کاری فعالیت هایی برای مفاهیم تقارن، تبدیلات و فراکتال هندسی را پیدا می کنند که به نوعی یک سیر در Sketchpad می باشد و مفاهیم نقاط، خطوط، زوایا، مثلث ها، چهارضلعی، چندضلعی ها، تقارن، تبدیلات و ساختارهایشان روشن تر می شوند.

۸- کاربرد هندسه و پیدا کردن تقریب: این خط کار برای تطابق با فعالیت های دانشجویان و متناسب با محتوای هندسه ی دانشگاهی است. استقراء و شهود در هندسه ی دبیرستانی و دانشگاهی

و موضوعات پایه‌ای همچون دایره و مثلث در هندسه و هندسه‌ی اقلیدسی و نااقلیدسی در قالب فعالیت‌هایی بیان می‌شوند که شامل ابزارهای مکان هندسی، انیشتن سازی، مثلثات، ساخت کشفیات فردی، کشفیات مشهور هندسه‌دانان، هندسه‌ی هایپربولیک است.

۹- کشف در مورد بخش‌های مخروطی: دانش‌آموزان مدل‌های فیزیکی از بخش‌های مخروطی می‌سازند و سپس با انعطاف‌پذیری بیشتر به طراحی مدل می‌پردازند. و مفاهیم بیضی، سهمی، هذلولی و بهینه‌سازی بکار گرفته می‌شوند و مسائل با استفاده از این مفاهیم در صفحه‌ی کار نمایش داده می‌شوند.

۱۰- قضیه‌ی فیثاغورث و فهم آن (اثبات‌ها و مسائل مرتبط): خط کار در اینجا فعالیت‌هایی برای دانش‌آموزان فراهم می‌کند تا دانش‌آموزان با انواعی از اثبات‌ها و مسائل و کاربردهای قضیه فیثاغورث آشنا شوند.

۱۱- تفکر دوباره درباره اثبات: متعهد کردن و بکار گرفتن دانش‌آموزان در اثبات حدس‌ها و استفاده از هندسه‌ی پویا برای تفکر درباره اثبات انواع مفاهیم و محتوای آنها. این خط کار شامل فعالیت‌هایی برای نقش اثبات، اثبات به عنوان یک توضیح، اثبات به عنوان یک کشف، اثبات به عنوان یک توجیه، اثبات به عنوان یک چالش و اثبات به عنوان طبقه بندی است.

Cabri – Geometer ۴.۲

نرم‌افزاری است که در آن دانش‌آموزان می‌توانند اشکال و نمودارهای هندسی را کشف، آزمایش و دستکاری کنند. یکی از ویژگی‌های مهم Cabri این است که دانش‌آموزان با امتحان و دستکاری نمودارها اجازه پیدا می‌کنند که اجزای ثابت یک تصویر ترسیم شده را به خوبی بررسی نمایند. محیط Cabri کمک می‌کند که دانش‌آموزان موضوعات آزمایشی و تئوری هندسه را با هم ارتباط دهند. و اینکه دانش‌آموزان برای توسعه‌ی فهم این موضوع که توجیه و اثبات‌های مجرد در هندسه به عنوان یک نیاز است، بپردازند (حادث، هرشکویتز، شوارز، ۲۰۰۰، هولزل، ۲۰۰۱، لویز و لیونگ،

(۲۰۰۲) ^۶.

در محیط Cabri دانش‌آموزان به طور مستقیم و با استفاده از لغزنده و ابزارهایی خاص، فعالیت‌های مناسبی را فراهم می‌کنند. در واقع دانش‌آموزان کسانی هستند که تصاویر را می‌سازند، دستکاری و کشف می‌کنند. لابورد^۷ (۱۹۹۵) اشاره می‌کند که Cabri – Geometer یک مدل واقعی از میدان تئوری هندسه‌ی اقلیدسی ایجاد می‌کند و اینکه برخی موضوعات فیزیکی را به صورت دستی بر روی یک صفحه‌ی نمایش مورد بررسی قرار می‌دهد. شکل هندسی ایجاد شده با Cabri یک نمایش مرسوم از هندسه‌ی کاغذ و پرگار است. یک کاربرد مهم Cabri تشخیص و تفهیم اشکال هندسی ترسیم شده جدید با استفاده از اشکال اولیه هندسی می‌باشد (لابورد، ۱۹۹۵). دانش‌آموزان می‌توانند استراتژی‌های حل مسائل هندسی خود را نشان دهند و آن را به صورت روابط هندسی بیان کنند. آنها با استفاده از دانش هندسی و نمایش اشکال و موضوعات هندسی در صفحه‌ی نمایش نرم‌افزار و تفکر در مورد آنها دایره‌ی واژگان خود را برای بیان ایده‌های ریاضیات و هندسی بالا می‌برند (دیساس، هویلس، ساترلند، نوس، هیلا^۸). در نتیجه ساخت و کشف تصاویر پیچیده هندسی با استفاده از Cabri به آسانی انجام می‌شود.

یک DGS به عنوان مثال Cabri نوع خاصی از تصاویر را معرفی می‌کند: نمایش تصاویر تولید شده در یک جهان کوچک^۹. مشخصه‌ی این تصاویر خاصیت پویایی آنها می‌باشد. تصاویر می‌توانند ترسیم شوند و با استفاده از درگ کردن تغییر پیدا کنند. روشهای مختلف درگ کردن (کشیدن) امکان پذیر است، اما هریک از آنها تعدادی مشخصه از تصویر اصلی و خواص آنها را حفظ می‌کند، بخصوص آن روابطی که در ساختارها تعریف شده‌اند.

آموزش دهندگان ریاضیات توسعه‌ی استدلال استقرایی را به عنوان یک هدف اصلی آموزش ریاضیات می‌دانند و بررسی عمل اثبات به عنوان یک ابزاری برای توسعه‌ی استدلال استقرایی را همیشه در نظر داشتند. در واقع دانش‌آموزان اغلب به خاطر پیدا نکردن و ندیدن استدلال برای اثباتهایشان نمی‌توانند آنها را توسعه دهند (حادس، هرشکویتز، شوارز، ۲۰۰۰). از طرف دیگر امروزه نقش تکنولوژی در

^۶Hades, Hershkoietz, Hoelzl, Lopez, Lioung

^۷Laborde

^۸Disasse, Hoyles, Sutherland, Noss, Healy

^۹MicroWorld

افزایش جنبه‌های مختلف یادگیری ریاضیات قابل ملاحظه است. و از این جهت *Cabri* به عنوان یک فعالیت گسترده موقعیتی ایجاد می‌کند که دانش‌آموزان تصاویرشان را ترسیم کنند، یک موقعیت متناقض با فرض خود را به دست آورند، درستی ساختارها را با توجه به تصاویر آزمایش کنند و به توجیه خود برای این ساختارها نگاه کرده و به تفکر واداشته شوند. بطور کلی این مطلب بیان کننده آن است که فرضیاتی که با *Cabri* تفکر دانش‌آموزان را بر می‌انگیزد، توجیه و اثبات‌های آنها را توسعه می‌دهد. دی ویلیرز (۱۹۹۸) اشاره می‌کند که تولید اثبات توسط دانش‌آموزان طی مراحل زیر انجام می‌شود:

- ۱- توضیح و تعریف (تهیه‌ی بینشی از اینکه چرا آن درست است)؛
 - ۲- کشف (کشف یا اختراع یا ابتکار نتایج جدید)؛
 - ۳- درستی (علاقمند شدن و اهمیت دادن به درستی حالت).
- Cabri* بر آن است که برای محققان جنبه‌های تجسم، آزمایش و باز خورد فوری را که موضوع تدریس و یادگیری هندسه را بررسی می‌کند، به میان آورد. تعدادی از محققان کارهایشان بر روی نقش *Cabri* بر افزایش فهم دانش‌آموزان از ماهیت اثبات ریاضیات و افزایش مهارت‌های اثبات آنهاست. این مطالعات نشان می‌دهد که محیط *Cabri* به فرآیند اثبات دانش‌آموزان از آزمایش به سوی اثبات استقرائی کمک می‌کند (هیلا، هویلس، ۲۰۰۱، جونز، ۲۰۰۰، ماریوتی، ۲۰۰۰، ۲۰۰۱، ماراداس، گویترز، ۲۰۰۰).^{۱۰}

۵.۲ برخی ابزارهای کاربردی نرم افزار

۱.۵.۲ *Locus*

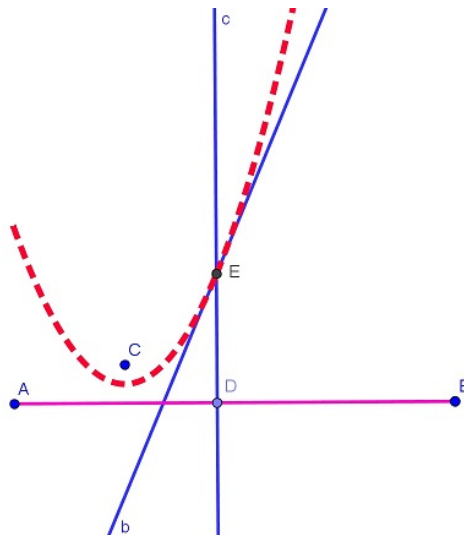
یک نمونه از ابزارهای این نرم افزار مکان هندسی می‌باشد که با استفاده از آن می‌توان مکان هندسی نقاط مرتبط با اشکال هندسی، خطوط و نقاط را بدست آورد. به عنوان مثال مکان هندسی مجموعه‌ی همه‌ی نقاطی که از یک نقطه دلخواه C و خط AB به یک فاصله‌اند، یک سهمی می‌باشد. حال

^{۱۰} Healy, Mariotti, Marrades, Gutierrez

می‌توان به دو شکل این ابزار و مفهوم مکان هندسی را به دانش‌آموز نشان داد. اول اینکه با ابزارهای نرم‌افزار مرحله به مرحله نقاط و خطوط را رسم نماییم و در مرحله‌ی آخر مکان هندسی موردنظر را به دانش‌آموز نشان دهیم. در واقع این همان روش بدست آوردن مکان هندسی یک شکل با نرم‌افزار می‌باشد. حال روش رسم سهمی با استفاده از این ابزار را توضیح می‌دهیم.

با استفاده از ابزار *Segment – Between – Two – Points*، پاره‌خط $\overline{AB}$ و ابزار *New – Point*، نقطه‌ی C را بر صفحه و D را بر پاره‌خط $\overline{AB}$ رسم می‌کنیم. همچنین با استفاده از ابزار *Perpendicular – Bisector* عمودمنصف بین دو نقطه‌ی C و D را رسم می‌کنیم و با ابزار *Perpendicular – Line* از نقطه‌ی D بر پاره‌خط $\overline{AB}$ عمود می‌کنیم. و با ابزار *Intersect – Two – Point* نقطه‌ی اشتراک عمود و عمود منصف را مشخص می‌کنیم. حال ابزار *Locus* را انتخاب کرده و به ترتیب بر روی نقاط D و E کلیک کرده، مکان هندسی مورد نظر مشخص می‌شود (شکل ۱.۲).

دوم اینکه سهمی را رسم نموده و مثلاً سهمی بودن شکل را برای آنها اثبات کنیم. یعنی با دادن



شکل ۱.۲: مکان هندسی برای سهمی

نقاط دلخواه بر روی سهمی و اندازه‌گیری فاصله‌ی آن نقاط از نقطه‌ی C و پاره‌خط $\overline{AB}$ می‌توان به دانش‌آموز تساوی این فواصل را نشان داد.

۲.۵.۲ متحرک‌سازی

متحرک یا انیمیشن‌سازی ابزاری است که با استفاده از آن می‌توان تصاویر پویا را بر روی اشکال هندسی نشان داد. این ابزار یکی از ابزارهای قوی نرم‌افزارهای امروزه است. از زمانهای بسیار قدیم، انسان نخستین برای بیان مطالب خود از ترسیم اشکال بر روی صخره‌ها و سنگها و یا حتی زمین استفاده می‌کردند. با پیدایش و کشف ذغال این امر آسان‌تر و بعد از آن نوشتن بر روی پوست حیوانات با استفاده از مرکب و دوات به مراتب رو به پیشرفت و بهبودی قرار گرفت. سرانجام با پیدایش تکنولوژی و صنعت این امر بصورت اعمال گرافیکی و طراحی انجام می‌شود. اما در سطوح بالاتر گرافیک و طراحی، پیدایش نرم‌افزارهای مدرن و پیشرفته، بخصوص نرم‌افزارهای سه بعدی و انیمیشن‌سازی کمک بسیار زیادی به انسان در انجام کارها نموده است که از آنها می‌توان حتی در ساخت ماکت یا شبیه‌سازی بناها و یا اشیاء دیگر استفاده نمود که این امر کمک بسیار زیادی در صرفه‌جویی مصالح، مواد، زمان و آسان نمودن این کارها می‌کند.

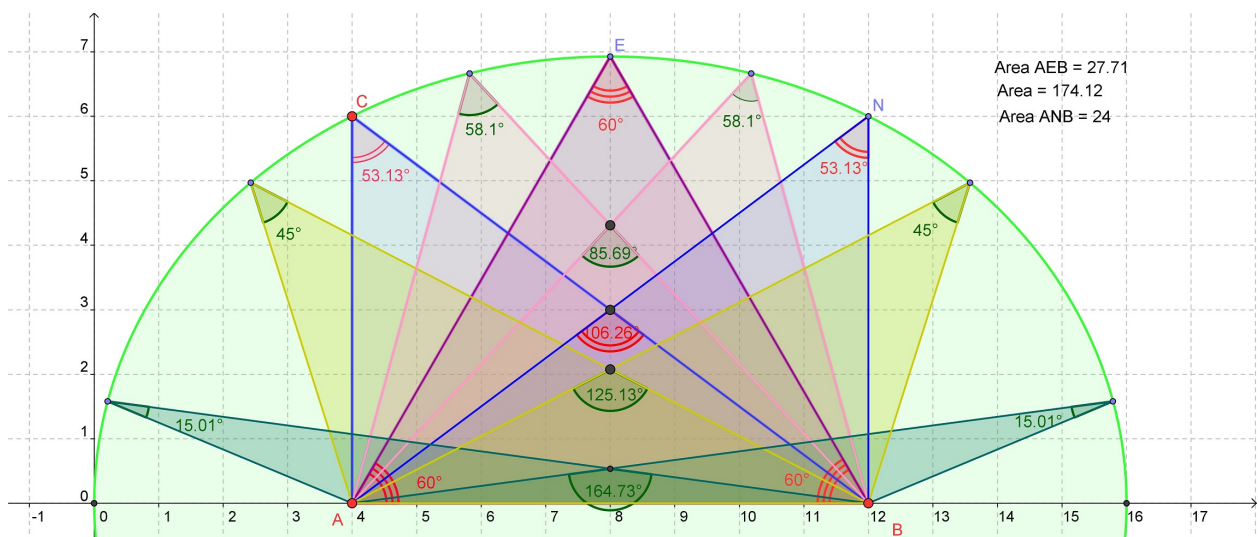
نقش انیمیشن‌ها در آموزش مفاهیم مجرد و بخصوص مفاهیم انتزاعی ریاضی، غیر قابل انکار است. اهمیت این موضوع، خصوصاً آنجایی آشکار می‌شود که با کمبود وقت و امکانات لازم برای تمامی مخاطبان، روبرو هستید. در چنین شرایطی، یک انیمیشن غنی و پرمفهوم، می‌تواند جای ساعت‌ها تدریس و انتقال مطلب را بگیرد و در ملموس کردن موضوع درسی برای مخاطبان شما، نقش عمده‌ای را بازی کند.

۶.۲ مثال‌های کاربردی

۱.۶.۲ قانون اول کپلر

در اوایل قرن هفدهم، پیش از آنکه نیوتن قوانین حرکت خود را کشف کند، کپلر سه قانون اساسی خود را که برای توصیف حرکت سیارات بکار می‌رفت، اعلام کرد. کپلر این قوانین را از رصدهای دقیق و پردامنه‌ای که تیکو براهه از حرکت سیارات انجام داده بود، استنتاج کرد. قوانین کپلر پایه

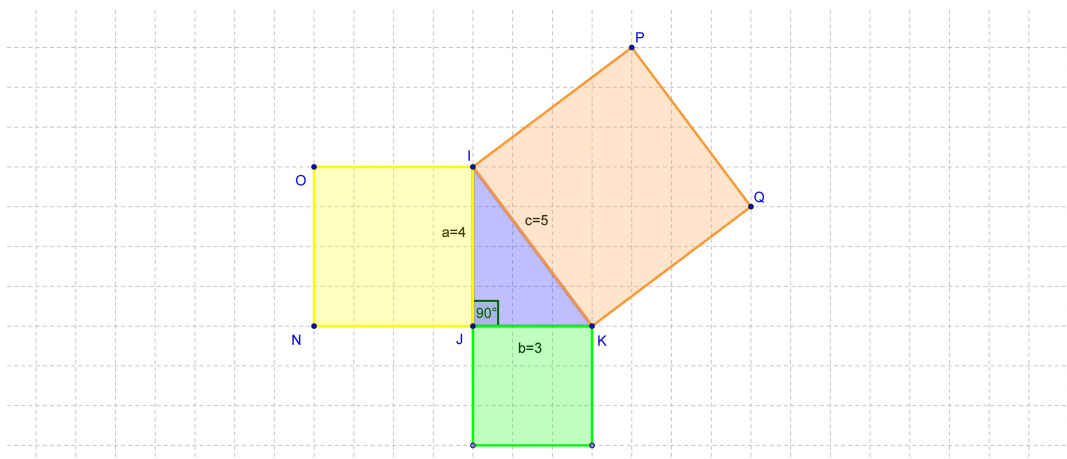
و اساس قوانین نیوتن و مکانیک کلاسیک برای توضیح حرکات سیاره‌ای است. یوهانس کپلر (۱۵۷۱-۱۶۳۰)، ستاره‌شناس آلمانی، نشان داد که سیارات در مسیرهایی بیضوی حرکت می‌کنند (شکل ۲.۲) و خورشید در یکی از کانونهای بیضی قرار دارد. پس از مشاهده‌ی مدار مریخ، او همچنین نشان داد که خط فرضی میان سیاره و خورشید در زمانهای مساوی مناطق مساوی بیضی را قطع می‌کند، زیرا هنگامی که سیاره به خورشید نزدیکتر می‌شود، سریعتر حرکت می‌کند. بالاخره او نشان داد که چگونه زمان گردش سیاره در مدار خورشید (دوره تناوب مداری) با فاصله افزایش می‌یابد. این کشفها به قوانین حرکت سیاره‌ای کپلر معروف شدند. با استفاده از قوانین کپلر می‌توان مدار حرکت سفینه‌های فضایی را پیشگویی نمود. به این مشخصات مداری را که سفینه پیرامون خورشید خواهد پیمود با استفاده از محاسبات ریاضی تعیین می‌شود. البته این مسأله را در مورد اجرام سماوی مانند سیارات نیز می‌توان انجام داد.



شکل ۲.۲: قوانین کپلر

۲.۶.۲ قضیه فیثاغورث

در مثلث قائم‌الزاویه ABC که زاویه A در آن قائمه است (شکل ۳.۲)، در صفحه رابطه‌ی زیر همیشه بین اضلاع برقرار است: $c^2 = a^2 + b^2$. این قضیه برای ما توضیح می‌دهد که جمع مساحت‌های دو مربع ساخته شده روی دو ضلع قائم یک

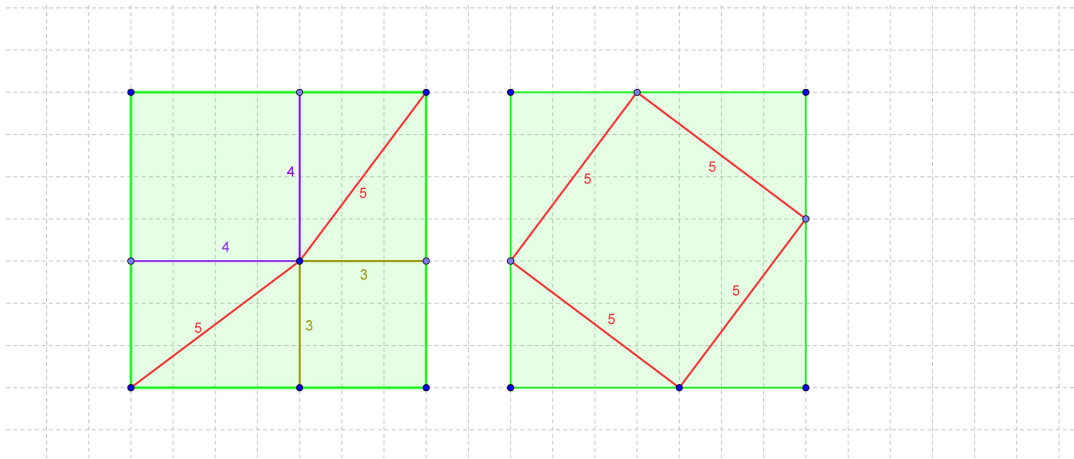


شکل ۳.۲: قضیه فیثاغورث

مثلث قائم‌الزاویه، با مساحت مربع ساخته شده روی وتر برابر است.

اثبات قضیه: می‌توان با توجه به (شکل ۴.۲) اثبات هندسی قضیه را به راحتی درک کرد.

در هر دو شکل مربعی به ضلع $a + b$ داریم. در شکل سمت راست چهار نمونه از مثلث قائم‌الزاویه دور مربع ساخته شده بر روی وتر وجود دارد. و هر چهار مثلث دارای مساحت یکسان می‌باشند. با چند جابجایی در شکل سمت راست به شکل سمت چپ می‌رسیم. در این شکل همان چهار مثلث قبلی وجود دارند، اما مربعی که اضلاع آن به ضلع c بود به دو مربع به اضلاع a و b تبدیل شده است، که همان قضیه فیثاغورث را نشان می‌دهد.



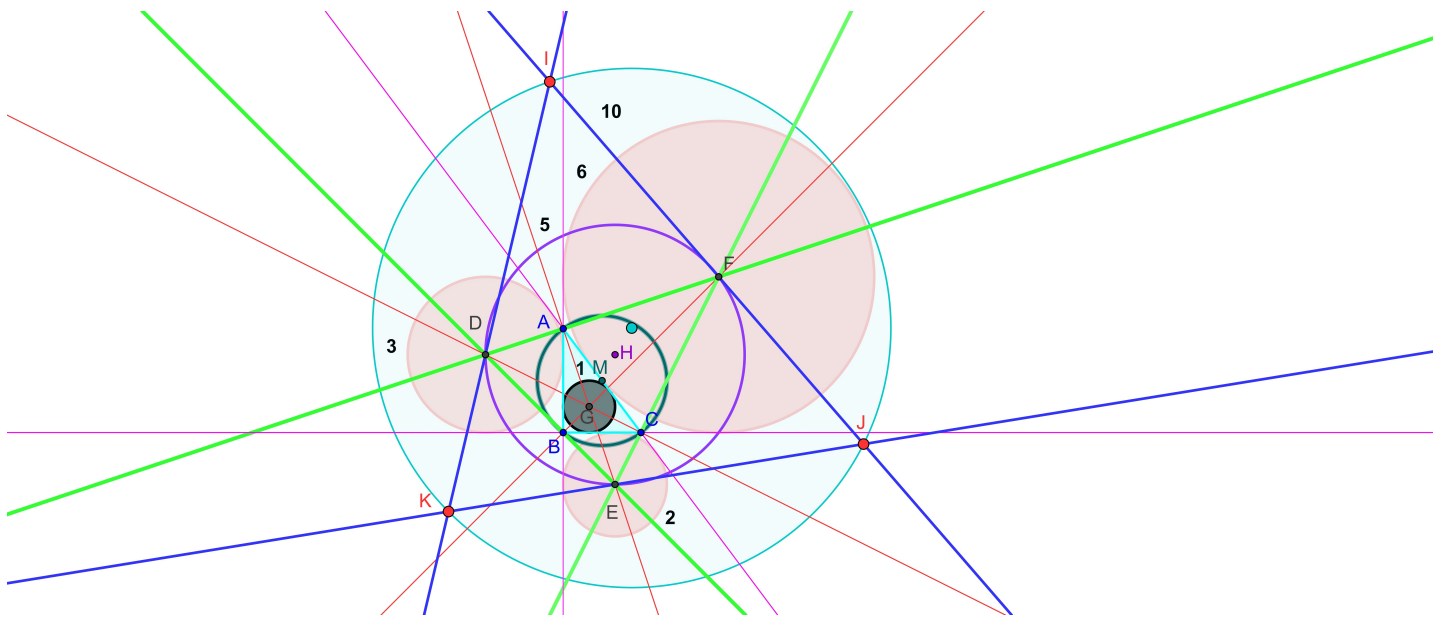
شکل ۴.۲: اثبات قضیه

۳.۶.۲ دایره‌های محاطی داخلی و خارجی یک مثلث

تعریف ۱.۶.۲. دایره محاطی داخلی یک مثلث بزرگترین دایره‌ای است که آن مثلث می‌تواند در بر بگیرد. این دایره بر سه ضلع آن مماس می‌باشد. مرکز دایره محاطی مرکز داخلی مثلث نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۶.۲. یک دایره محاطی خارجی مثلث، یک دایره در خارج مثلث است که بر یکی از اضلاع مثلث و امتداد دو ضلع دیگر مماس باشد. هر مثلث دارای سه دایره محاطی خارجی متمایز است که هر کدام بر یکی از اضلاع مثلث مماس می‌باشد.

مرکز دایره محاطی داخلی بر روی تقاطع نیمسازهای زوایای داخلی قرار دارد. مرکز یک دایره محاطی خارجی بر روی تقاطع نیمساز یک زاویه داخلی و نیمسازهای خارجی دو زاویه دیگر قرار دارد. از این رو، استنباط می‌گردد که مرکز دایره محاطی داخلی و سه مرکز دایره‌های محاطی خارجی یک سیستم چهار مرکزی (orthocentric) را تشکیل می‌دهند (شکل ۵.۲).



شکل ۵.۲: دوائر محاطی داخلی و خارجی مثلث

۷.۲ فرضیاتی درباره Cabri

با *Cabri* دانش‌آموز می‌تواند یک نمایش را به عنوان اینکه اگر یک مدل باشد، ببیند. در واقع این نرم‌افزار زاویه‌ی دید را برای ترسیم اشکال هندسی بهتر می‌کند و می‌توان با دید همه جانبه موضوع هندسی را بوسیله‌ی شکل هندسی مربوط به آن بررسی نمود. هنگام ترسیم، دانش‌آموز به آسانی با یک فرآیند عینی از هندسه مواجه می‌شود. به عنوان مثال، یک نقطه یا خط در صفحه را می‌توان در صفحه‌ی نمایشی که متعلق به آن صفحه است مشاهده کند. دانش‌آموز اطلاعات عینی را برای شکل دادن به تصاویر و پیدا کردن برخی خواص آنها در نظر می‌گیرد، اما این اطلاعات به طور کلی هنوز برای استخراج کارهای هندسی کافی نمی‌باشد. به عنوان مثال، نمایش‌های آن نامحدود نمی‌باشند، دو خط که نمی‌توانند در صفحه نمایش اشتراک داشته باشند، ممکن است به طور عینی *Cabri* به ما بگوید که اشتراک دارند یا ندارند. برخی عملکردها مانند حرکت دادن یک نقطه برای رسیدن به یک خط غیر ممکن است. براساس یافته‌های بروسو (۱۹۹۷) این اطلاعات با وجود در دسترس بودن، جزئی هستند. *Cabri* قادر به نمایش همه‌ی موضوعات مورد مطالعه دانش‌آموزان که می‌بینند، نیست. چون ترسیم برخی اشکال مشکل است. یک مشکل عمده برای هر دانش‌آموز و

حتی معلم در برخورد با Cabri وجود دارد و این سوال است که "چگونه می‌توان اطلاعات مربوط به یک ترسیم را بدست آورد و چگونه می‌توان آنها را برای نتیجه‌گیری در مورد اطلاعاتی که نمی‌بینیم بکار برد و مسائل هندسی را حل کرد". حال دو فرضیه‌ی عمده خواهیم داشت:

۱- تجسم تصویری؛

۲- تجسم غیرتصویری.

اولین فرضیه بیانگر آن است که این اطلاعات باید برای دانش‌آموزان به راحتی در دسترس باشد و سپس شروع به تحقیق نمایند، حتی اگر فقط از تجسم تصویری استفاده کنند، که این تحقیق بدست آمده از ویژگی‌های Cabri است. Cabri نه تنها نمایش دهنده است، بلکه یک نرم‌افزار هندسه‌ی پویا است. در واقع استفاده از آن برای حدسیات هندسی قدری مشکل به نظر می‌رسد و بیشتر برای ترسیم و دستکاری بخشی از شکل هندسی است. حتی برای ترسیم و تکمیل شکلی که بخشی از آن کشیده شده مناسب است. به عنوان مثال رسم یک مربع با اندازه‌های مختلف براساس رئوس مشخص شده. بنابراین دانش‌آموزان به تفکر واداشته می‌شوند که دلیل حرکت همزمان واحدهای تصویری، رابطه‌ی موجودی بین آنهاست و برای دانش‌آموزان به روشنی مشخص می‌شود. و در واقع این حرکت همزمان بطور کلی در نرم‌افزار هندسه پویا بیشتر مورد تأکید است. چون این حرکت همزمان واحدهای تصویری است که ارتباط بین واحدها را مشخص می‌کند (جان^{۱۱}، ۱۹۹۸).

فرضیه دوم بیانگر این است که تجسم تصویری با هندسه‌ی پویا به نوعی ناکارآمد است و از برخی ویژگی‌های تصاویر حمایت می‌کند. بنابراین مبرا کردن از بعد و توجه به اصول موضوع هندسی ابزارهای اساسی برای دانش‌آموزان و دانشجویان در این فرآیند تحقیق با مطالعه‌ی نمایش داده شده و حل مسائل هندسی است. با این حال ابزارهای کافی در Cabri برای آزمایش فعالیت‌های هندسی موجود نمی‌باشد. اما:

اولاً تعدادی از ابزارها برای نمایش عینی خیلی مرتبط هستند، نظیر: ابزارهای ترسیم، تغییر و اندازه. دانش‌آموز می‌تواند به اشکال نگاه کند، اندازه بگیرد، ابعادشان را تغییر دهد و موضوعات تازه‌ای بسازد و اینکه هنگام ترسیم بخشی از یک شکل ویژگی‌های هندسی را بشناسد و ببیند و بازخورد این

^{۱۱}Jone

موضوعات را از طریق نرم افزار ببیند (لاپورد، کاپونی، ۱۹۹۴)^{۱۲}.
دوم با ابزارهایی که ساختارها را به هم مرتبط می کنند. ساختار اولیه، اشتراک، تقاطع، موازی، عمود منصف، نیمساز، چند وجهی و.... و تبدیل ها. حتی اگر از هندسه ی اصل موضوعی استفاده کنیم نیاز به کنترل استفاده از این ابزارها نیست. در واقع کنترل تجربی برای تعدادی موقعیت ها سخت است.

علاوه بر این ابزارهایی هستند که با توجه به تعاریف اصل موضوعی، طراحی می کنند و کمک زیادی به ارتباط بین ترسیمات، با وسیله و اندازه گیری آنها، می کنند. در نهایت اعتقاد داریم که معلم یا محقق می تواند مجموعه ای از ابزارهای در دسترس در *Cabri* را برای طراحی انتخاب کند. در واقع ابزارهای خاصی هستند که هم آموزشی اند و هم برخی استراتژی های غیر ممکن و نامناسب را می سازند.

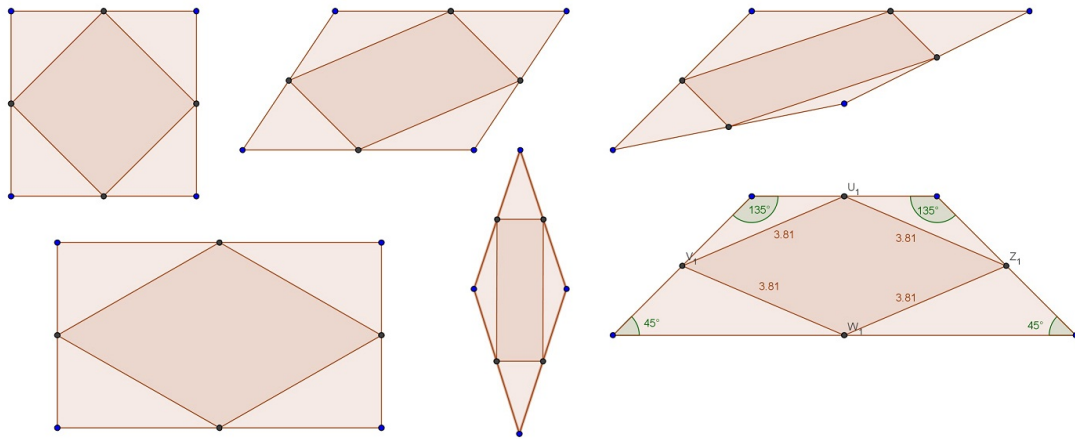
۸.۲ چهارضلعی واریگون

یک مسأله ی بازپاسخ با عنوان چهارضلعی واریگون^{۱۳} و مثلث میانی وجود دارد. این مثال با استفاده از نرم افزار بررسی شده است و این کار با کاغذ و مداد انجام نمی شود. یک چهارضلعی $ABCD$ مفروض است. نقاط میانی H, G, F, E از اضلاع چهارضلعی را مشخص و به هم وصل کنید. از طریق آزمایش دانش آموز حدس می زند که $EFGH$ متوازی اضلاع است. در واقع چهارضلعی $ABCD$ را رسم و با ساختن $EFGH$ یک چهارضلعی دیگر ساخته می شود که حدس می زنیم یک متوازی الاضلاع است. در ابتدا مثلث را بررسی می کنیم. برای مثلث با داشتن سه نقطه ی میانی هر ضلع، یک مثلث بوجود می آید که این مثلث، هم با سه مثلث کناری هم نهشت و هم با مثلث بزرگ متشابه است (شکل ۶.۲).

حال سؤال این است که تصاویر پویا چگونه کشف دانش آموز را کنترل می کند؟ هنگام تغییر یک رأس متوازی الاضلاع چه چیزهایی ثابت و متغیر می باشند؟ و چرا فکر می کنید که این حدس درست

^{۱۲}Kapuni

^{۱۳}Varignon



شکل ۸.۲: چهار ضلعی واریگون

است؟

با هندسه‌ی کاغذ و پرگار انجام این کار، که اشکال به نوعی ثابت هستند، سخت می‌باشد. اما محیط پویا به نوعی بسیاری از ویژگی‌های هندسی را حفظ می‌کند. به عنوان مثال، رئوس چهارضلعی $ABCD$ دلخواه هستند و می‌توان آنها را در محیط پویا حرکت داد و با تغییر مکان آنها ویژگی‌ها حفظ می‌شوند. و این بخاطر ثابت بودن نقطه‌ی میانی و تشکیل متوازی‌الاضلاع $EFGH$ از طریق این نقاط است. فرآیند ساختاری فوق نشان می‌دهد که دانش‌آموز دلایل هندسی را براساس سطوح ون‌هیلی (فصل سوم) بیان می‌کند. تجسم، آنالیز، تجرید، استقراء و دقت زیاد بر روی این کارها مهم می‌باشد. اما بطور کلی دانش‌آموز به فهم مفاهیم کلی هندسی نمی‌رسد. دانش‌آموزان با کشف خواص متوازی‌الاضلاع نظیر اضلاع، قطرها، زوایه‌ها، اثبات شکل‌های هندسی با استفاده از متوازی‌الاضلاع و ویژگی‌های هندسی دیگر، برای ساختار اثبات‌های جدید، در کنار فرضیات و اثبات‌های نوشته شده حرکت کنند.

۹.۲ ساخت و استقراء با ابزارهای پویای هندسی

بسیاری از دانش‌آموزان فعالیت‌های خود را به طور گسترده در دنیای کوچکی با نام *microworld* بر روی کامپیوتر انجام می‌دهند. این کار موجب شده که دانش‌آموزان به تنهایی فعالیت‌های خود را توجیه کنند و چرایی آنها را بیان کنند تا اینکه نیازهای بیرونی آنها را فراهم کند (هیلا و هویلس، ۱۹۹۹). حتی گاهی اوقات دانش‌آموزان به چرایی کارهای خود جواب می‌دهند. در واقع هدف اصلی از طراحی این نوع فعالیت‌ها و کار با آنها بر روی *Cabri* برگزاری کلاسهای درسی بر اساس فعالیت‌های نرم‌افزای، نه تنها توضیح و تفسیر این فعالیت‌ها و نتیجه‌ی آنهاست، بلکه استفاده از توضیحاتشان به عنوان یک پایه برای بدست آوردن نتیجه‌گیری‌های منطقی است. دانش‌آموزان با مشاهده‌ی ترسیمات ثابت و محرک در محیط *Cabri* به طراحی فعالیت‌هایی می‌پردازند که هم به روابط بین آنها برای استفاده در طراحی‌های دیگر و هم اینکه ویژگی‌ها و روابط معین و تفاوت‌های موجود این ویژگی‌ها که می‌تواند به عنوان یک نیاز نتیجه‌گیری شود، دست پیدا می‌کنند.

طراحی فعالیت از طریق *Cabri* برای تدریس به چهار حالت دسته بندی می‌شود: در حالت اول دانش‌آموزان نیازمند یک ساختار در تصاویر هندسی با *Cabri* بودند تا با شناسایی و توصیف ویژگی‌ها و روابط بین آنها ساختار را مورد استفاده قرار دهند. همچنین استفاده از ابزارهای کامپیوتر و آزمون فرضیات، درباره ویژگی‌های بیشتر، که ممکن است درست باشند، و سرانجام توضیح اینکه چرا آنها درست هستند، ساخته شود. در طی این مرحله از کار، نقش معلم آسان‌سازی و به فعالیت واداشتن نسبت به ساختار است.

در حالت دوم، نقش معلم بطور مستقیم است، در واقع او دانش‌آموزان را کنار هم قرار می‌دهد تا برای تولید فعالیت‌ها و نوشتن اثبات آنها، با هم همکاری کنند دانش‌آموزان کمک می‌کنند تا توضیحات خود را مرتب کنند و در طول یک فعالیت کامپیوتری آنها را به زنجیره‌ای از نتیجه‌گیری‌های منطقی تعمیم دهند.

سومین حالت، به طور خاص تکرار حالت اول است، به اضافه‌ی اینکه یک فرضیه از اثبات را بنویسند.

حالت چهارم (هسته‌ی همه‌ی مراحل): به دانش‌آموزان یک مسأله چالش برانگیز می‌دهیم، که هر

کدام از آنها یک تصویر با استفاده از *Cabri* برای آن ترسیم و از هر یک از ابزارها استفاده می کنند و آنها در واقع با این ابزارها آشنا می شوند و آنها را شناسایی کرده، و هر یک از ویژگی ها و خواص مسأله را توضیح داده و اثبات می کنند.

فصل ۳

GeoGebra

۱.۳ مقدمه‌ای بر GeoGebra

خیلی از مواقع برای تدریس، معلمان به خوبی مطلب را بازگو نمی‌کنند و این بدلیل عدم تشخیص اهمیت محیط یادگیری برای دانش ریاضیات است. اما ایجاد یک محیط مناسب و فراهم کردن امکانات برای مهارت معلمان ریاضی، متناسب با تنوع دروس و علایق دانش‌آموزان به عنوان یادگیرنده‌ها کمی سخت است.

جئوجبرا (هندسه وجبر) یک نرم‌افزار ترکیب کننده هندسه، جبر و حساب دیفرانسیل و انتگرال و نمونه‌ای از نمایش‌های آنهاست (هوهن وارتر، جونز، ۲۰۰۷) و یکی از نرم‌افزارهای کدباز ریاضی می‌باشد که اخیراً طراحی شده و در مؤسسه ملی دانشگاه کمبریج توسعه یافته است. در واقع این نرم‌افزار نمایش دهنده‌ی یک سطح فکر کامل است که تجربیات و کشف فعالیت‌های در سطوح اولیه و رو به بالای آموزش را طراحی می‌کند (هوهن وارتر، جونز، ۲۰۰۷). این نرم‌افزار را می‌توان به صورت آزاد از سایت www.GeoGebra.org یا www.tebyan.net دانلود کرد. جئوجبرا بر روی دامنه‌ی وسیعی از عملکرد سطح فکر کار می‌کند و برای راه اندازی بر روی *java* نصب می‌شود. این نرم‌افزار عموماً برای سطوح اولیه‌ی آموزش دانش‌آموزان با برنامه‌ی آموزشی توسط وزارت ملی آموزش و پرورش براساس تدریس موضوعات در هندسه برای دانش‌آموزان دبیرستان

طراحی شده است.

بررسی وسایل رایج برای هندسه و جبر در برنامه‌ی آموزش دبیرستان و استفاده از تکنولوژی فشرده مهم می‌باشد. تحقیقات برخی محققان بر روی روشهای تدریس ریاضیات براساس توانایی یادگیرنده‌هاست که ارتباط بین هندسه و جبر را قوی می‌کند. این نرم‌افزار ابزار چندکاره‌ای را برای تجسم ایده‌های ریاضیات از مقدمات تا سطوح دانشگاهی فراهم می‌کند.

دکتر مارکوس هوهن وارتر این نرم‌افزار پویای کدباز ریاضیات را طراحی کرد، که برای تدریس و یادگیری ریاضیات، از مدارس متوسطه تا دانشگاه مورد استفاده است (هوهن وارتر، پرینر^۱، ۲۰۰۷). دکتر مارکوس هوهن وارتر و دکتر زولت لایوینا کسانی هستند که به استفاده از جئوجبرا در آموزش ریاضی علاقمند شدند و یک گروه کاری ملی به نام "مؤسسه ملی جئوجبرا" را تشکیل دادند. آنها به توسعه‌ی یک روش تکنیکی و کاربرد آموزشی آن توجه داشتند. این گروه در کشور ترکیه توسط دو مؤسسه‌ی آنکارا و استانبول حمایت می‌شود.

اولین نشست رسمی جئوجبرا در کشور استرالیا در جولای ۲۰۰۹ در شهر لنیز با عنوان *EMG*^۲ گرفته شد. همچنین اولین نشست اوراسیای جئوجبرا در کشور ترکیه برگزار شده است [۱۳]. مهمترین دلیل برای کاربرد و استفاده از این نرم‌افزار این است که معلمان و دانش آموزان با حمایت تعدادی زبان ورودی و دروس *Online* که در این زبانها در دسترس‌اند، لذت می‌برند و برای این منظور وب سایتی برای کاربرد و استفاده‌ی آن طراحی شده است. جئوجبرا چهره‌های جبر، هندسه و حساب دیفرانسیل و انتگرال را در یک محیط نرم‌افزاری نمایش می‌دهد، که به طور کاملاً مرتبط، فشرده و به شیوه آسان مورد استفاده هستند. به عبارت دیگر این ابزار مفاهیم هندسه پویا را در درون فایل‌هایی از جبر و آنالیز توسعه می‌دهد.

در اینجا توانایی مهم جئوجبرا این است که به طور همزمان در یک صفحه‌ی نمایش، دو پنجره، یکی هندسی و دیگری جبری دارد که هر تغییر در یک پنجره موجب تغییر در پنجره‌ی دیگر، متناظر با تغییر انجام شده در پنجره‌ی قبلی می‌شود. به عنوان مثال با مشخص کردن یک نقطه در پنجره هندسی، مختصات آن نقطه در پنجره‌ی جبری مشخص می‌شود و با تغییر دادن مکان نقطه همزمان

^۱Preiner

^۲Euroasia Meeting of GeoGebra

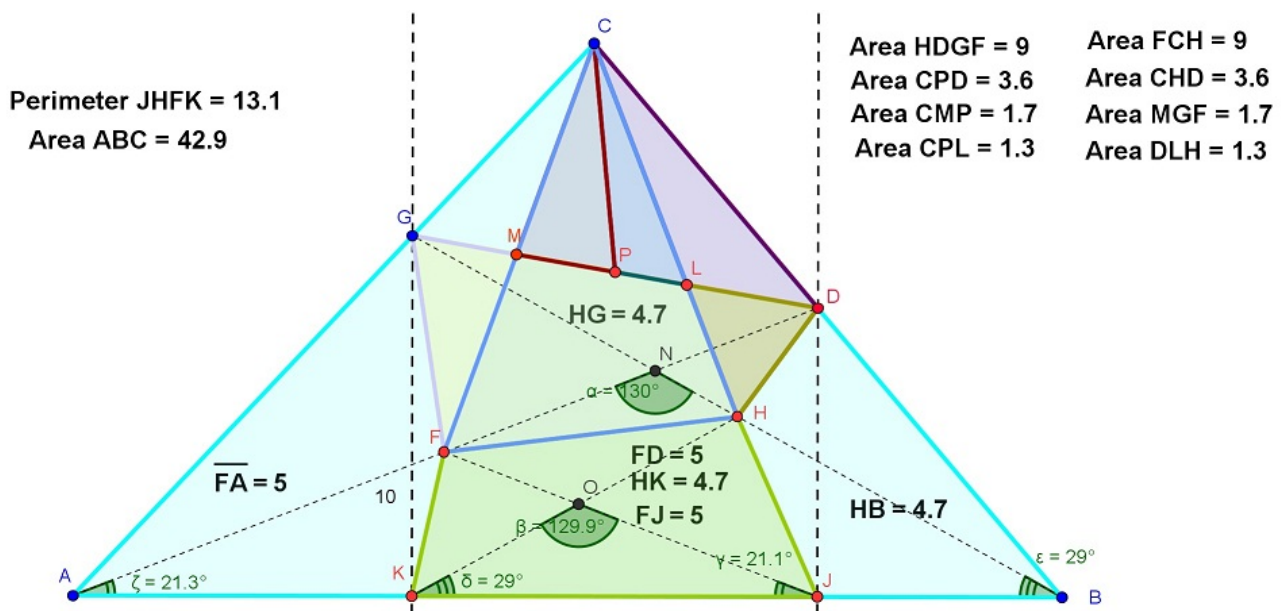
در پنجره جبری مختصات نقطه تغییر خواهد کرد. در واقع فرصتی برای حرکت بین دو پنجره ایجاد می‌شود. یعنی مثلاً با حرکت دادن نشانگر موس و با مشاهده معادله، کاربر می‌تواند معادله‌ای را تغییر دهد و همزمان آن تغییر را در پنجره هندسی مشاهده کند. یا اینکه از طریق ابزارهایی مانند خطوط نیمساز، عمود منصف و میانه و رسم اشکالی همچون مثلث و دایره، اصول اقلیدس و قضایا، مسائل و خواص هندسی را در محیط این نرم‌افزار نمایش داده و با حدس درباره‌ی مسائل مختلف به حل جبری و هندسی آنها بپردازد.

مثال ۱.۱.۳. مثلث دلخواه $\triangle ABC$ مفروض است. نقاط F و H به ترتیب نقاط میانی سواهای

$\overline{AD}$ و $\overline{BG}$ ، پاره‌خطهای $\overline{DJ}$ و $\overline{GK}$ عمود بر $\overline{AB}$ و P نقطه میانی $\overline{GD}$ می‌باشند. داریم:

مساحت ناحیه $HDGF = \text{مساحت } \triangle FCH$ مساحت $\triangle CPD = \text{مساحت } \triangle CHD$

مساحت $\triangle CMP = \text{مساحت } \triangle MFG$ مساحت $\triangle CPL = \text{مساحت } \triangle DLH$



شکل ۱.۳: تساوی مساحت مثلث‌ها و چندضلعی

در جئوجبرا ابزارهای اولیه فقط نقاط، بردارها، پاره‌خطها، چندضلعی‌ها، خطوط و همه‌ی بخش‌های مخروطی نمی‌باشند، بلکه توابعی شامل متغیر مستقل x نیز می‌باشند. یعنی می‌توانیم

بصورت مستقیم مختصات نقاط یا بردارها، معادلات خطوط یا قسمت‌هایی از مخروط، توابع جمعی، اعداد، زوایا و نظیر آن را وارد کنیم. به عنوان مثال خط g بصورت $g: 3x + 4y = 7$ وارد می‌شود یا دایره‌ی c به صورت $(x - 3)^2 + (x + 2)^2 = 25$.

در واقع یکی از اهداف آموزشی مهم جئوجبرا این است که بصورت تجربی به فهم یادگیری ریاضیات به هر دو صورت مسأله‌مدار و تحقیق‌مدار در کلاس درس و خانه کمک کند. دانش‌آموزان از سیستم جبر کامپیوتری و یک سیستم مؤثر هندسی استفاده کنند، و با این عمل می‌توانند توانایی قابل درک خود را به بهترین روش ارتقا دهند.

همچنین نوعی نمایش برای سیستم جبر کامپیوتری فراهم می‌کند. به عنوان مثال اهمیت پیدا کردن نقاطی از توابع (نظیر ریشه‌ها، محل نقاط انحنای و نقاط خاص توابع)، بطور مستقیم وارد کردن توابع، معادلات، مختصات، پیدا کردن مشتق و انتگرال توابع وارد شده. روش کار جئوجبرا یک روش کاملاً مناسب برای نمایش چندگانه از مفاهیم ریاضی است. در واقع هر موضوع ریاضی را به صورت جبری و در پنجره گرافیکی نمایش می‌دهد و هر تغییر در یکی از این پنجره‌ها، تغییر متناسب با پنجره‌ی دیگر را سریعاً نمایش می‌دهد.

در نهایت اینکه روش مطالعه‌ی جئوجبرا سه جزء دارد:

- ۱- خواننده‌های علمی؛
- ۲- تکنولوژی پویای بازکد جئوجبرا؛
- ۳- محتوای ریاضیات که شامل هندسه، جبر، احتمال، آنالیز داده‌ها و مباحثی از ریاضیات گسسته است.

۲.۳ جئوجبرا برای مدارس ابتدایی

کانون استفاده از نرم‌افزار جئوجبرا (*Prim*) در مدارس ابتدایی و به نوعی تکمیل جئوجبرا نسبت به *TAO* است. تغییرات موجود در نرم‌افزار پویای ریاضیات (*DMS*) جئوجبرا به سوی جئوجبرا (*Prim*) اندکی متفاوت با جئوجبرای نظیر با نیازهای اولیه‌ی مدارس با توجه به مشاهده‌ی عملکرد

دانش‌آموزان با نرم‌افزار است. رسم اشکال در جئوجبرا (*Prim*) فرصتی برای اکتشاف پویا و یک نمایش از موضوعات ریاضیات را فراهم می‌کند تا آنجا که به کارهای هندسی منتهی می‌شود (لابورد، ۲۰۰۱، کریس، ۲۰۰۴)^۳. همچنین استفاده از آن در کلاس موجب تقویت فهم دانش‌آموزان از مفاهیم و مسائل هندسی می‌شود.

۳.۳ یک چارچوب آموزشی

در یک کار تحقیقی توسط میلارد، اسپکتور، داویدسن (۲۰۰۲) و اسپکتور و داویدسن (۲۰۰۰) یک چارچوب آموزشی با عنوان مدل یادگیری آسان شده (*MFL*)^۴ طراحی شده است. (*MFL*) دارای چهار اصل است:

- ۱- قرار دادن تجربه‌ی یادگیری: در اینجا معلم باید با توضیح یک مسأله یا مفهوم از ریاضیات با جئوجبرا در سطح محتوای دبیرستانی و با ایجاد فعالیت‌هایی برای یادگیری پویا، راهبرد آموزشی فراهم کند.
- ۲- نمایش و به چالش کشیدن مسائلی که سطح دشواری آنها روبه افزایش است: در این مرحله، معلم در صفحه‌ی کار جئوجبرا با توضیح دروسی که شامل تمرین‌های سوال محور هستند، سؤالاتی طراحی و با این سؤالات به دانش‌آموزان اجازه کشف مفاهیم ریاضیات را می‌دهد. در اینجا اغلب یادگیری با ابزارهای جئوجبرا و پنجره‌ی *Redefine* که توسط کاربر طراحی شده است، حاصل می‌شود. به عنوان مثال زمانی که می‌خواهیم نقطه‌ی میانی یک پاره خط را مشخص کنیم، ابزار جئوجبرا به آسانی و به دور از پیچیدگی آنچه با تقریب پرگار ترسیم می‌شود، مورد استفاده قرار می‌گیرد.
- ۳- درگیر کردن یادگیرنده با پاسخ به یک مجموعه سؤالاتی نسبتاً پیچیده درباره موقعیت مسائل: درواقع در این مرحله با توجه به بحث‌های گروهی و کلاسی، دانش‌آموزان می‌خواهند چگونگی تدریس درس را توصیف کنند، و اینکه برای یادگیری حین فعالیت چه انتظاری خواهند داشت و چگونه می‌توان یادگیری آنها را با اجرای بهتر فعالیت‌هایشان افزایش داد.

^۳Krise

^۴Model Facilitated Learning

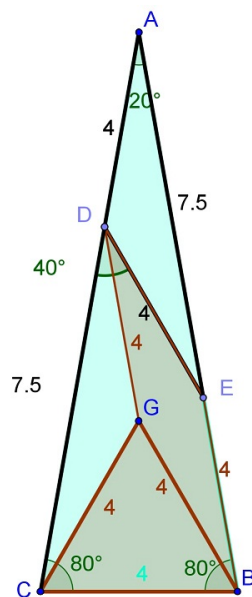
در واقع کشف بازپاسخ یک خاصیت از صفحات پویای جئوجبرا است و تنوع سئوالاتی از قبیل چه - اگر و چه - اگر - نه را می‌توان درباره‌ی موضوعات ریاضیات پویا انتظار داشت. (والتر^۵، براون^۶، ۲۰۰۵).

۴- به مبارزه طلبی یادگیرنده‌ها با توسعه‌ی دستورها و تصمیم برای هدایت و ساخت موقعیت‌های غیرمنتظره: در اینجا معلمان را برای استراتژی‌های تدریس با شیوه‌های متفاوت یادگیری دانش‌آموزان و با بررسی عملکرد معلم و سئوالهای ممکن، که متناسب با دانش آنها و اعمال، سئوالات و پاسخ‌های ممکن دانش‌آموزان می‌باشد، را به چالش می‌کشیم. هدف اصلی این است که معلمان با شروع حدس درباره‌ی مسائل و تشکیل اصول مقدماتی با بکارگیری تکالیف پویا برای یادگیری در آموزش ریاضی آماده شوند. مثال زیر چارچوب فوق را بیشتر نشان می‌دهد.

مثال ۱.۳.۳. در مثلث متساوی‌الساقین $\triangle ABC$ داریم: $\angle A = 20^\circ$ $\angle B = \angle C = 80^\circ$ و $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{BC}$ مطلوب‌ست: $\angle D = ?$ (شکل ۲.۳).
اگر از نقطه C پاره خط $\overline{CG}$ را به طول $\overline{BC}$ رسم نماییم بطوریکه $\angle BCG = 60^\circ$ ، آنگاه چون مثلث $\triangle BCG$ یک مثلث متساوی‌الساقین با یک زاویه 60° است، پس $\triangle BCG$ متساوی‌الاضلاع است. بنابراین $\overline{BC} = \overline{CG} = \overline{BG}$ و $\angle GBE = \angle GCD = 60^\circ$.
 D را به G وصل می‌کنیم و چهارضلعی $ABDG$ یک دوزنقه متساوی‌الساقین است. بنابراین $\overline{AB}$ و $\overline{DG}$ موازی می‌باشند. از طرفی چون $\overline{AB} = \overline{AC}$ و $\overline{AD} = \overline{BE}$ پس $\overline{AE} = \overline{CD}$. همچنین داریم $\overline{AD} = \overline{CG}$ در نتیجه دو مثلث $\triangle AED$ و $\triangle CGD$ به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت هستند. در نتیجه $\angle AED = \angle CDG = 20^\circ$. چون $\overline{AB}$ و $\overline{DG}$ موازی هستند پس $\angle GDE = \angle AED$. ■

اما با نرم‌افزار می‌توان روشهای ساده‌تری برای این مسأله بدست آورد و فقط درستی این راه حلها را نشان می‌دهیم. اگر از نقطه E و B خطوط موازی AC و از نقطه A موازی DE رسم نماییم. شکل (۳.۳).

^۵Walter^۶Brown

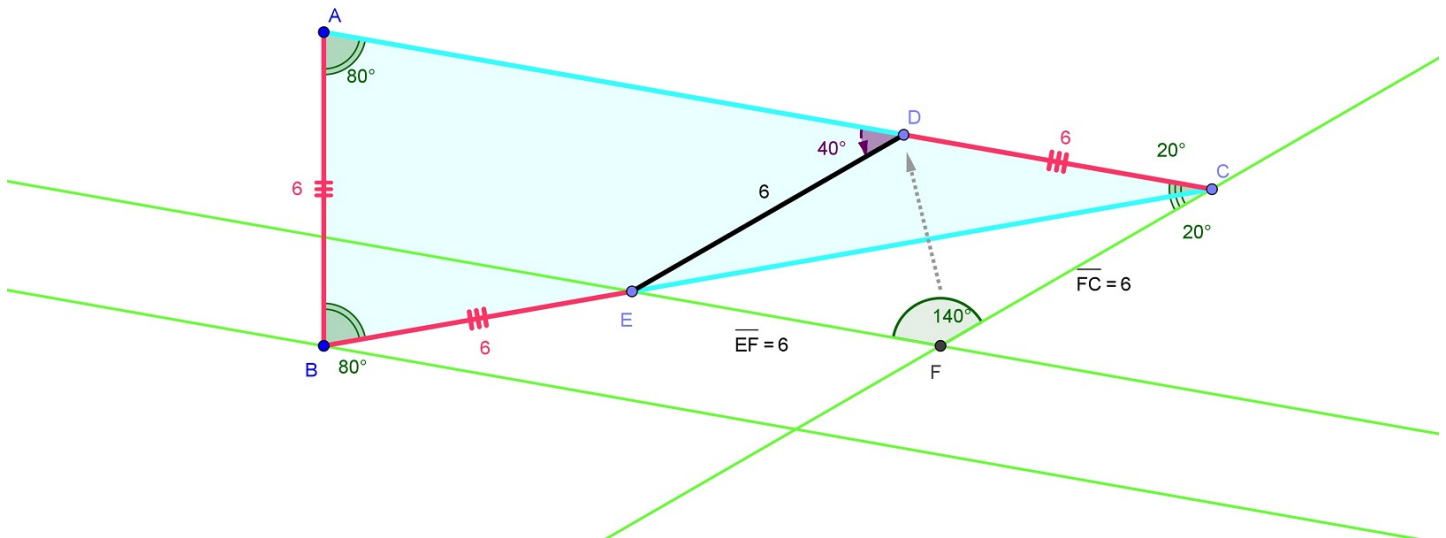


شکل ۲.۳: مثلث متساوی الساقین با زوایای مضرب ۱۰

همچنین می توان از نقطه A خطی موازی BC رسم نمود شکل (۴.۳).

برخی معلمان از جئوجبرا برای کارهای روتین به عنوان اثبات نتایج یا موضوعاتی که هر کدام می تواند بدون استفاده از نرم افزار پویای ریاضیات انجام شود، استفاده می کنند و قصد کشف روابط در حین فعالیت های انجام شده را با وجود شناخت ابزارهای جئوجبرا ندارند. می توانیم با مدلسازی تمرین های مؤثر تدریس در قالب مثال هایی همچون مثال فوق و ایجاد محیطی برای یادگیری مشترک با توسعه ی استراتژی ها و ایده هایی درباره ی تدریس و یادگیری ریاضیات، معلمان را تشویق کنیم. در واقع اغلب معلمان به متمرکز شدن بر روی دروس و توانایی تدریس مطالب متمایل هستند و انرژی لازم برای کیفیت باز خورد نمی گذارند. این مطلب مطابق با یافته های گزارش شده توسط اندرسون، هاشیمروگلو، آکیوز، کاسکون، کریستول و ویتبای (۲۰۰۹)^۷ است.

^۷Andreasen, Haciomeroglu, Akyuz, Coskun, Cristwell, Whitby



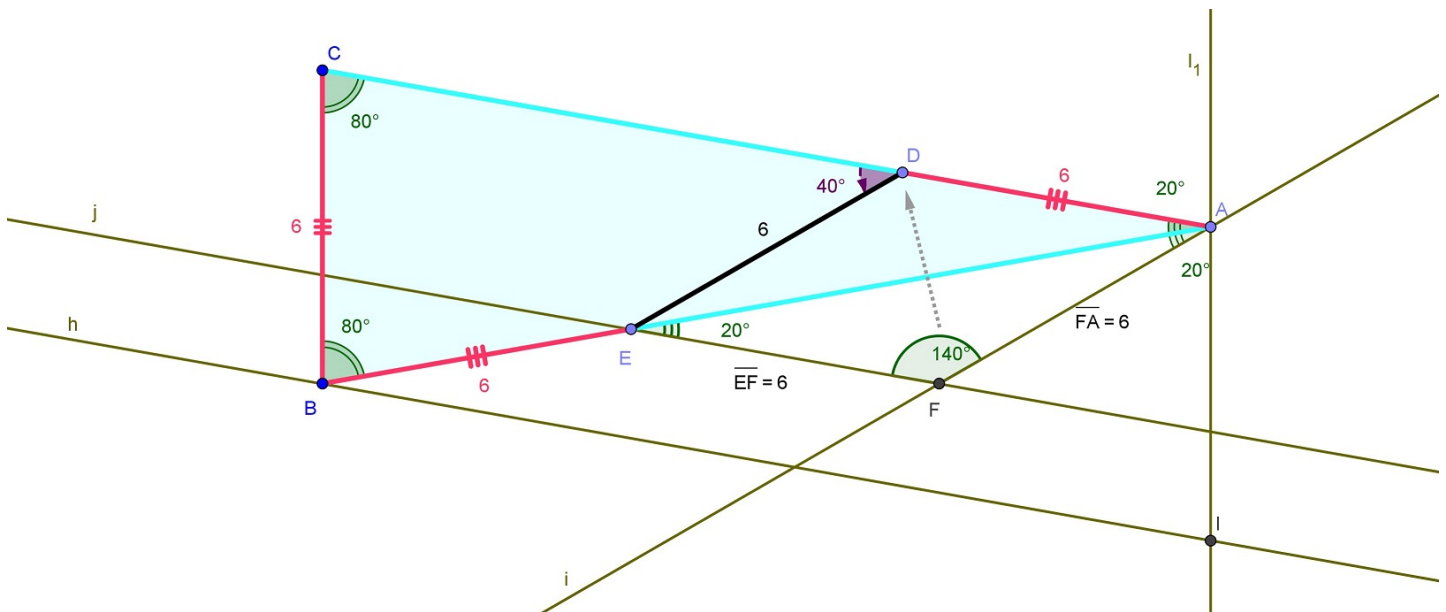
شکل ۳.۳: مثلث متساوی‌الساقین با زوایای مضرب ۱۰

۴.۳ ارزیابی چارچوب‌ها

چارچوب‌های مختلف تکنولوژی و ارزیابی آنها ابزارهایی هستند که برای ارزیابی کیفیت و مفید بودن کاربردهای آموزشی تکنولوژی توسعه یافته بودند (دپارتمان آموزشی ماساچوست، ۲۰۰۳، نویس، والکوی، اولیور، ۲۰۰۰)^۸. به هر حال این چارچوب و ابزارها برای تصمیم‌گیری معلمان در محتوای هندسه و اندازه طراحی نشده بودند. ارائه‌ی این چارچوب‌ها برای تصمیم‌گیری معلمان است که بتوانند کاربردهای جئوجبرا در زمینه‌های مختلف را در دانش‌آموزان توسعه دهند. معلمان با بررسی چندین فاکتور مهم، کاربرد تکنولوژی را برای درس هندسه انتخاب می‌کنند. و به همین خاطر نظریات مختلف یادگیری برای هندسه وجود دارد. تحقیق بر روی اینکه دانش‌آموزان چگونه هندسه یاد می‌گیرند یک مؤلفه‌ی مهم از دانش ریاضیاتی و محتوای پداگوژیکی معلمان برای تدریس است و باید هنگام برنامه ریزی درس هندسه بررسی شود.

در طراحی یک روش جدید برای حل مسائل ریاضیات در نظر گرفتن محتوای ریاضیات و محدودیت های سطح فکر مهم می‌باشند. بنابراین مطلوب ما هدایت برای تحقیق در حل مسائل ریاضیات

^۸Noeth, Vallko, Oliver



شکل ۴.۳: مثلث متساوی‌الساقین با زوایای مضرب ۱۰

و طرح تئوری اصول کلی نظریه‌های آموزشی در حل مسائل ریاضیات است. توجه به چارچوب شونفیلد^۹ (۱۹۸۵) با عنوان موضوعات حل مسئله، منابع حل مسئله، کنترل، راهیابی و باورها نیز مهم است. اجرای چهار مرحله استراتژی حل مسئله پولیا^{۱۰} (۲۰۰۰-۱۹۴۵، ۱۹۸۱) برای حل مسئله ریاضیات با جتوجبرا نیز به آموزش با تکنولوژی کمک خواهد کرد (مریل، ۲۰۰۰)، و به عنوان یک چارچوب اصلی برای طرح‌ریزی ساختاری بر روی یکپارچگی و کاربرد دانش تأکید دارد. و همچنین به محتوای خود ریاضیات نیز اشاره می‌کند. مریل با کار بر روی *Task-Centered* و *Content-First* ایده‌های مرکزی ریاضیات مدرسه را نمایش داد و برای دانش‌آموزان نوعی از فهم اتصال جزء - جزء و جزء - کل را بیان کرد.

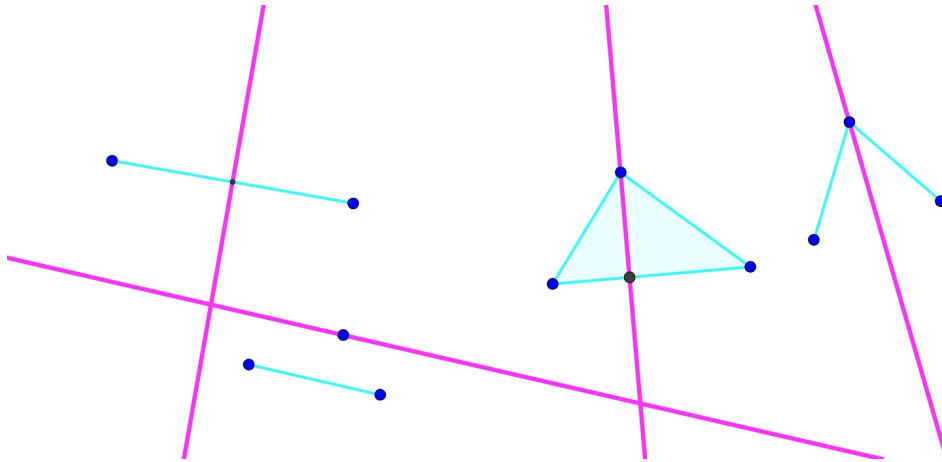
یادگیری هندسه با توجه به سطوح زیر توسعه می‌یابد:

سطح یک (تجسم یا تصور): هنگامی که دانش‌آموزان تصاویر را حین نمایش می‌بینند، اغلب با مقایسه و شناخت اولیه درباره آن تصاویر تشخیص می‌دهند و تصمیم می‌گیرند که براساس ادراک بسازند، نه آنکه دلیل بیاورند (شکل ۵.۳).

^۹Schoenfeld

^{۱۰}Polya

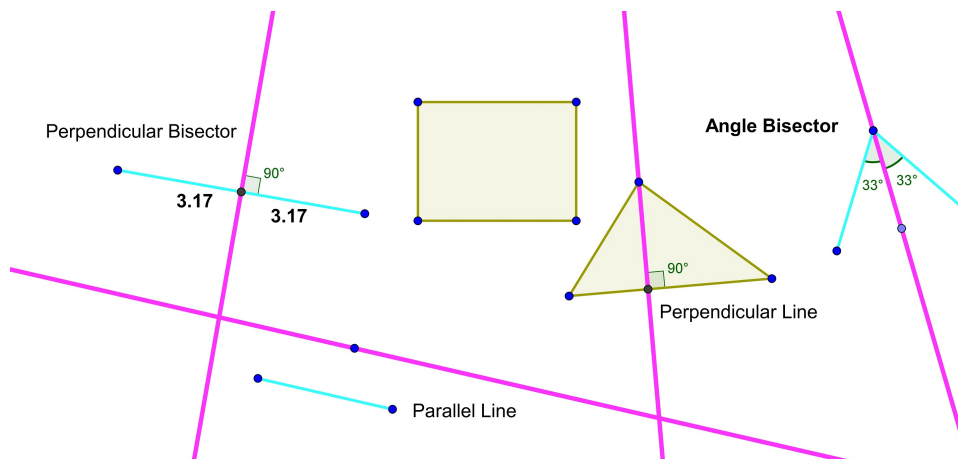
سطح دو (آنالیز کردن): هنگامی است که دانش‌آموزان تصاویر را مانند مجموعه‌ای از ویژگی‌ها



شکل ۵.۳: تصاویر را حین نمایش می‌بینند

می‌بینند. در واقع این ویژگی‌ها را تشخیص و نامگذاری می‌کنند، اما روابط بین این ویژگی‌ها را نمی‌بینند. دانش‌آموزان با توصیف یک موضوع ممکن است همه‌ی ویژگی‌ها را لیست کنند اما بین آنها ارتباطی نسازند (شکل ۶.۳).

سطح سه (تجريد، انتراع): هنگامی است که دانش‌آموزان روابط بین این ویژگی‌ها و تصاویر را

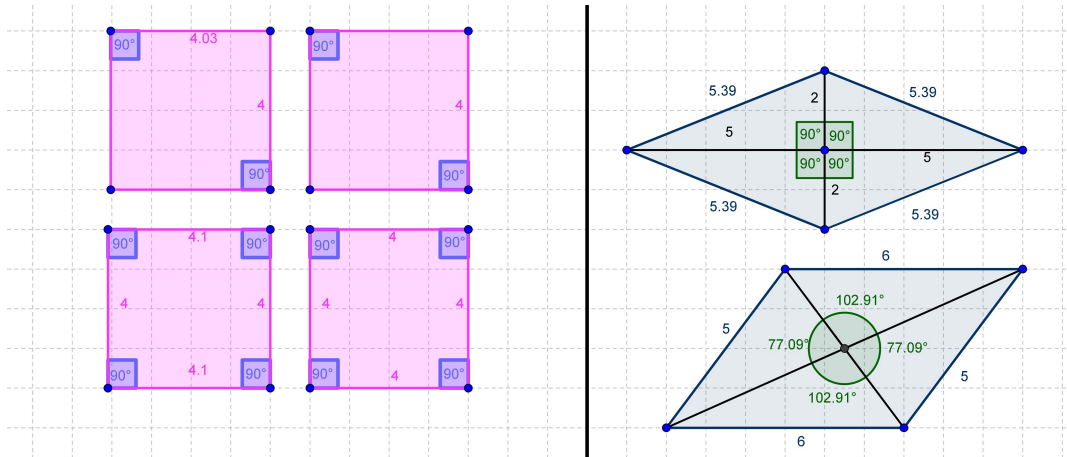


شکل ۶.۳: تصاویر را مانند مجموعه‌ای از ویژگی‌ها می‌بینند

نمی‌فهمند. در واقع در اینجا دانش‌آموزان تعاریف با معنی ایجاد می‌کنند و بحث‌هایی مطرح می‌کنند که دلایلشان را اثبات کند. به عنوان مثال فهمیدن اینکه مربع یک نوع مستطیل است. در اینجا نقش

و مفهوم رسمی استقراء فهمیده نشده است (شکل ۷.۳).

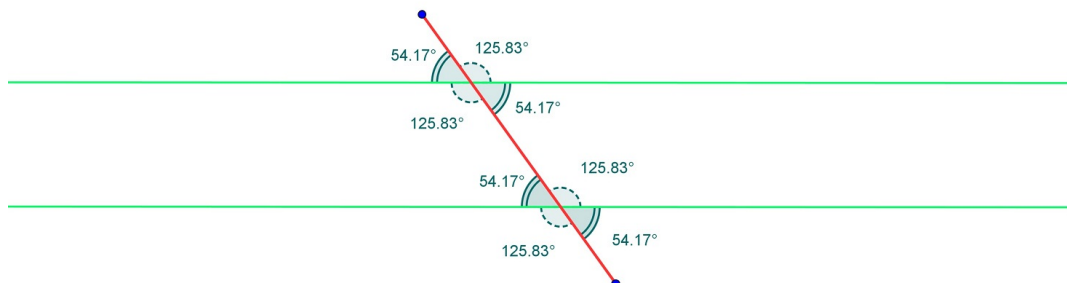
سطح چهار(استقراء، نتیجه‌گیری از جزء به کل): هنگامی است که دانش‌آموزان می‌توانند اثبات



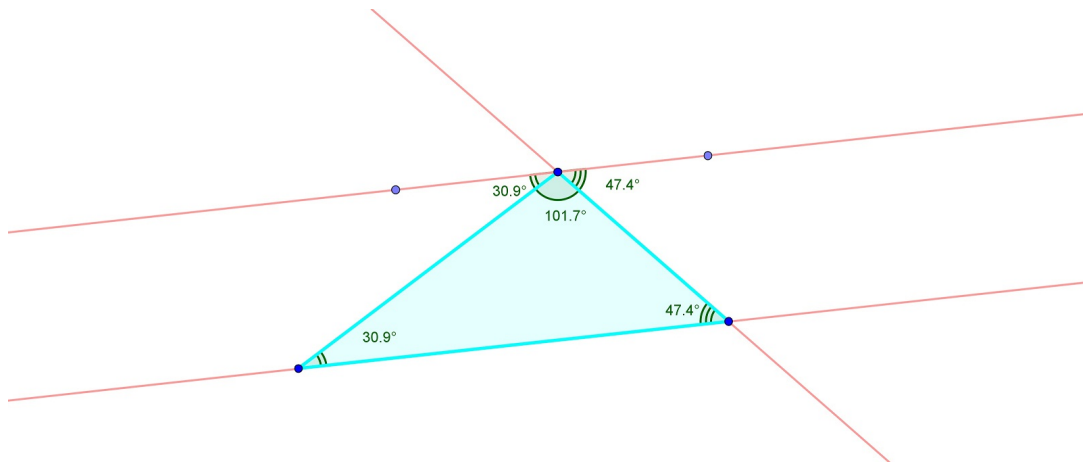
شکل ۷.۳: روابط بین این ویژگی‌ها و تصاویر را نمی‌فهمند

بسازند. در اینجا فهمیدن اصول موضوع و تعاریف و شروط مناسب لازم است (شکل ۸.۳). در این سطح دانش‌آموزان باید قادر به ساخت یک اثبات به عنوان یک فعالیت کلاسی درس هندسه باشند (شکل ۹.۳).

سطح پنج (سختی، دقت زیاد): هنگامی که دانش‌آموزان نمونه‌های استقراء را می‌فهمند و برای



شکل ۸.۳: می‌توانند اثبات بسازند (۱)



شکل ۹.۳: می‌توانند اثبات بسازند (۲)

سازماندهی دستگاه‌های ریاضیات بکار می‌برند (قضیه دایره دکارت). در این سطح با استفاده از اثبات‌های غیرمستقیم و اثبات توسط برهان خلف دستگاه‌های غیراقلیدسی را درک می‌کنند (ماسون، ون هیل، ۱۹۸۴) [۲۳].

۱.۴.۳ قضیه دایره دکارت

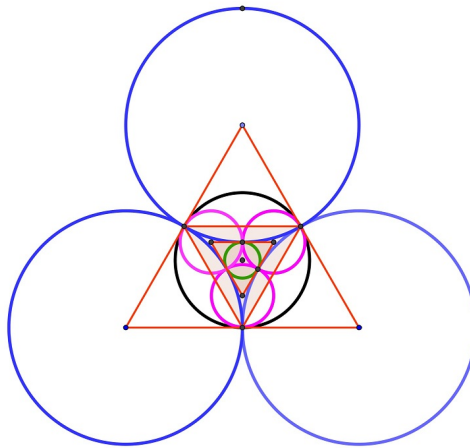
سه قرن قبل از میلاد آپولونیوس پرگایی دو کتاب درباره مماس‌ها نوشته بود. او می‌گفت هر چیزی می‌تواند از یک نقطه، خط یا یک دایره بدست آید. و اینکه دایره‌ای بسازیم که از نقاط خاصی می‌گذرد و بر خطوط و دوائر مشخص مماس می‌شود. حال این مسأله زمانی جالب می‌شود که همه‌ی اینها دایره باشند. این مسأله تمرین ابتکاری تعدادی هندسه‌دان سرشناس همچون ویتا و نیوتن است. نمونه‌ی زیر توسط دکارت و شاگرد محبوبش پرنسس الیزابت، دختر فردریک بررسی شده بود.

سه دایره‌ی نامتقاطع داریم که کاملاً بیرون یکدیگر و دو به دو مماس بر هم می‌باشند. در واقع مراکز این دوائر بر رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارند. حال سه دایره‌ی دیگر درون مثلث بزرگ مشابه حالت دوائر قبلی ترسیم می‌کنیم که به طور متقابل در سه نقطه‌ی مجزا مماس هستند. حال

^{۱۱}Van Hiele, Mason

یک دایره بر این دوائر مماس می‌کنیم بطوری که محاط بر مثلث می‌باشد. در نهایت یک دایره از محل تماس این سه دایره می‌گذرد (شکل ۱۰.۳).

رابطه‌ی (۱.۴) بین شعاع دایره‌ی محاطی و سه دایره‌ی مماس درونی این دایره برقرار است:



شکل ۱۰.۳: قضیه دایره دکارت

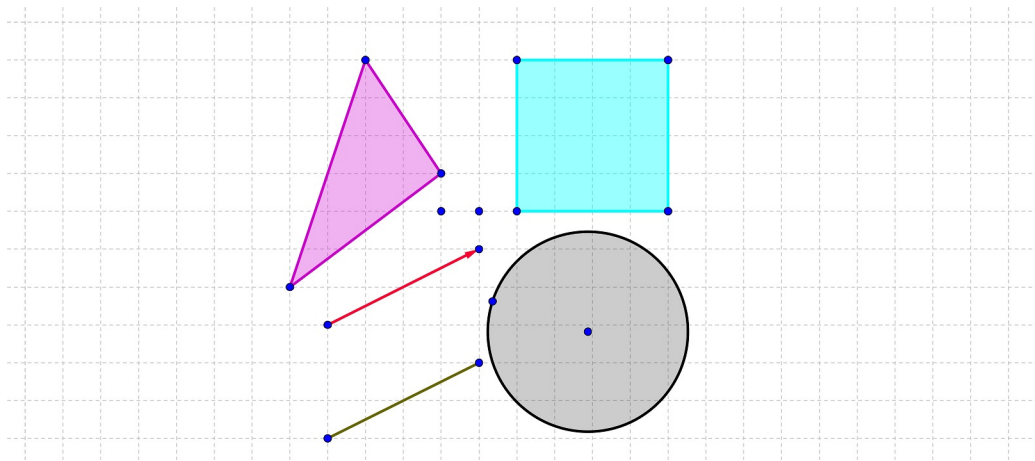
$$2\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right) = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)^2 \quad (1.4)$$

این مطلب به قضیه دایره‌ی دکارت معروف است [۷].

در سال ۱۹۹۲ کلمنتس^{۱۲} و باتیستا^{۱۳} پیشنهاد کردند برای این سطوح صفر نیز وجود دارد که آن را پیش‌شناخت نامیدند. دانش‌آموزان در این سطح فقط به یک زیر مجموعه از کارکترهای دیداری توجه می‌کنند و به طور ضعیف تصاویر را تشخیص می‌دهند (شکل ۱۱.۳). گذار از این سطح به عنوان یک پیشرفت به تجربیات آموزشی متناسب با بلوغ فکری دانش‌آموزان بستگی دارد. نظریه‌ی ون‌هیلی اشاره می‌کند وقتی دانش‌آموزان در مباحث و فعالیت‌های خود موضوعات مختلف را مورد مطالعه قرار می‌دهند، یادگیری مؤثر صورت می‌گیرد.

^{۱۲}Selentes

^{۱۳}Batista



شکل ۱۱.۳: پیش شناخت

۵.۳ فعالیت اکتشافی و پرمعنی

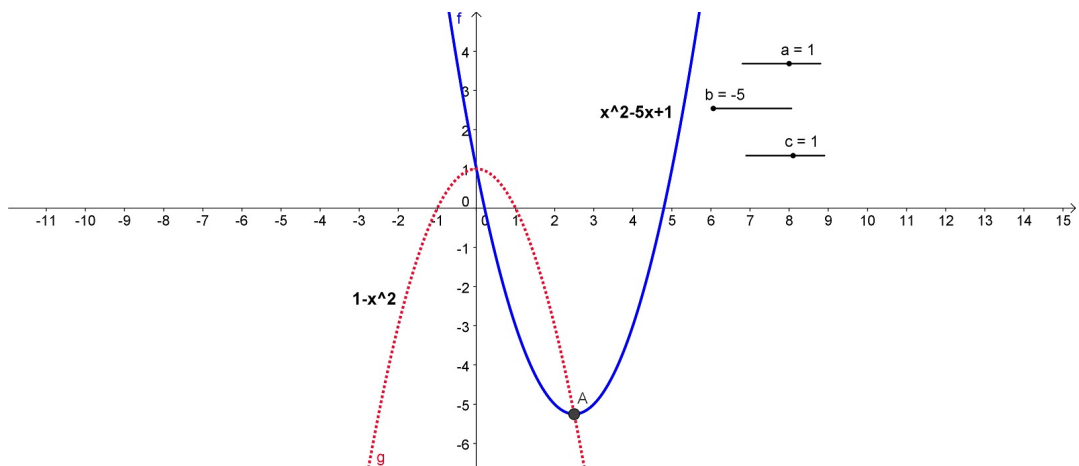
یک تفاوت مهم برای کار دانش‌آموزان در یک محیط تکنولوژی مانند جئوجبرا چگونگی استفاده از آن است. برای محققان بین فعالیت اکتشافی و پرمعنی تفاوت وجود دارد (زبیک^{۱۴}، ۲۰۰۷) و با ترسیم تفاوت بین مدل‌های ریاضیاتی اکتشافی و پرمعنی آن را تعمیم می‌دهند. در واقع مدل اکتشافی را شخص دیگری بوجود می‌آورد که دانش‌آموزان در بررسی یک مسأله آن را بکار می‌گیرند، در حالی که مدل پرمعنی چیزی است که دانش‌آموزان خود می‌سازند.

بنابراین استفاده از محیط پویا برای دانش‌آموزان شاید یک فعالیت اکتشافی باشد، در صورتی که اگر یک مسأله را با استفاده از جئوجبرا حل کنند و در صورت کار بر روی مسائل بازپاسخ^{۱۵} به فعالیت پرمعنی می‌رسند. در بررسی جئوجبرا یک تفاوت مهم این است که چه ابزارهایی برای دانش‌آموزان در یک جعبه پویا فراهم شده است. و این یعنی دانش‌آموزان به سادگی یک موضوع را ترسیم می‌کنند و سپس سئوالات مربوط به آن را پاسخ می‌دهند. و حل مسائل بازپاسخ با استفاده از ابزارهای جئوجبرا برای دانش‌آموزان یک فعالیت خوب محسوب می‌شود. حال سؤال اساسی این است که کدام پداگوژی وابسته به دانش ریاضیاتی اولیه دانش‌آموزان، قواعد ریاضیات و تجربیات آنها با جئوجبرا مناسب به نظر می‌رسد؟ یک مثال از فعالیت اکتشافی در (شکل ۱۲.۳) آمده است. با توجه

^{۱۴}Zbick^{۱۵}Open – ended

به دو سهمی آبی (خط‌پر) و قرمز (خط‌چین) که در شکل آمده است با تغییر b و ثابت نگه داشتن a و c از روی معادله‌ی سهمی آبی در تلاش برای کشف معادله‌ی سهمی قرمز هستیم. بعد از این دانش‌آموزان با تغییر a و c فرآیند را تکرار می‌کنند و در نهایت معادله‌ی یک سهمی را پیدا می‌کنند، که در آن متغیر a و c دلخواه هستند.

فعالیت‌های اکتشافی را بخصوص برای دانش‌آموزانی که ناآشنا با جئوجبرا هستند می‌توان با این



شکل ۱۲.۳: فعالیت اکتشافی

نرم‌افزار چارچوب بندی کرد. اما در این نوع فعالیت‌ها اغلب برای حل مسأله، این سؤال که چه چیزی انجام می‌دهند، یک مانع برای فکر کردن بر روی مسأله با استفاده از جئوجبرا می‌شود. به عبارت دیگر روابط بین مفاهیم ریاضیات بررسی نمی‌شود و چارچوب مشخصی برای ابزارهای قابل استفاده در جئوجبرا ساخته نشده است. به عنوان مثال هیبرت^{۱۶} (۱۹۹۷) اشاره می‌کند که دانش‌آموزان باید یک معنی برای مسأله با استفاده از ابزار بسازند و در طی یک فرصت کافی بهترین معنی را ارائه دهند.

هنگامی که از معلمان رسم یک مثلث متساوی‌الاضلاع با استفاده از جئوجبرا و پرگار و خط کش خواسته می‌شود، برای چگونگی استفاده از دو تجربه‌ی متفاوت، بازتابی برای معلمان با این سؤال بوجود می‌آید که این ابزارها چه کاربردهای پداگوژیکی دارند؟ این نکته توسط کاپوت (۱۹۹۲) نیز مورد بررسی قرار گرفته بود، بطوریکه ابزارهایی مانند پرگار یا خط کش منحصر به فعالیت‌های

^{۱۶}Hiebert

ریاضی نیستند. در واقع ترسیم اشکال متفاوت در محیط جئوجبرا است که دانش‌آموزان را خلاق می‌کند. یک دانش‌آموز به ترسیم پاره‌خط و فعالیت‌های مرتبط با آن، دیگری دایره و تغییرات آن و دانش‌آموز دیگر به ابزار دیگر در جئوجبرا مسلط می‌شود. اما نکته‌ی مهم آن است که ارتباط بین این دانش‌آموزان و به اشتراک گذاشتن فعالیت‌های آنها، قوی‌ترین و ارزشمندترین کاری است که خلاقیت را در آنها بوجود می‌آورد و موجب تقویت تفکر آنها می‌شود.

ترسیم اشکال در جئوجبرا برای برخی معلمان متفاوت است و این فرصتی مناسب برای آنها فراهم می‌کند که درباره ویژگی‌های ریاضیاتی این تصاویر که خود رسم می‌کنند، فکر کنند و متفکرانه به تصاویر رسم شده نگاه کنند، و اینکه چگونه از این ابزارها در محیط جئوجبرا برای ترسیم کارهایشان استفاده کنند.

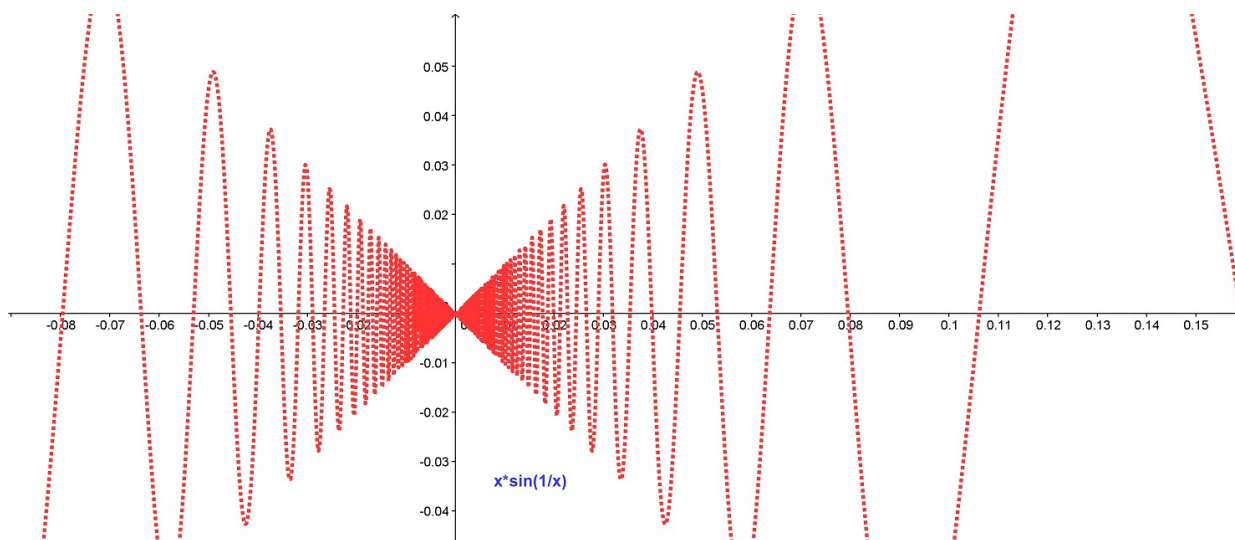
با از بین بردن محدودیت ابزارهای جئوجبرا، شروع به تفکر درباره‌ی این ابزارها متناظر با ابزارهای اقلیدسی موجود می‌کنند و تفاوت این دو نوع را در قالب مثال‌ها و مسائل بررسی خواهند کرد. به عبارت دیگر این ابزارها با شروع توسعه‌ی مفاهیم ریاضیات برای معلمان، به عنوان اینکه آنها را به یک هدف داده شده راهنمایی می‌کند، بازتاب‌هایی از قبیل اینکه چرا و چگونه به این هدف رسیدند را بررسی می‌کنند. اما بحث مهم در همه‌ی این مثال‌ها و مسائل بررسی پداگوژیکی فعالیت می‌باشد، که ممکن است واقعاً معنی ریاضیاتی این فعالیت برای دانش‌آموزان نامفهوم باشد. مثلاً تفاوت‌های ترسیم یک مربع که ممکن است به علت بدشکل بودن به اشکال دیگر شباهت داشته باشد یا اینکه نمی‌توان به درستی اولیه، دوباره آن را رسم کرد و این مفهوم خوبی را در بحث اندازه ایجاد نمی‌کند.

۶.۳ یک درس ترسیمی از توابع حقیقی

بسیاری از توابع حقیقی بررسی و تحلیل کلاسیک آنها مشکل می‌باشد.

برای مثال تابع $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه مقابل تعریف شده است: $f(x) = x \sin(1/x)$

برای این تابع در همسایگی نقطه‌ی صفر مشکلاتی از نظر فهم وجود دارد (شکل ۱۳.۳). در اینجا جئوجبرا همانطور که در شکل می‌بینیم با یک آشکارسازی حقیقی این بدفهمی را برطرف نماید.

شکل ۱۳.۳: نمودار f

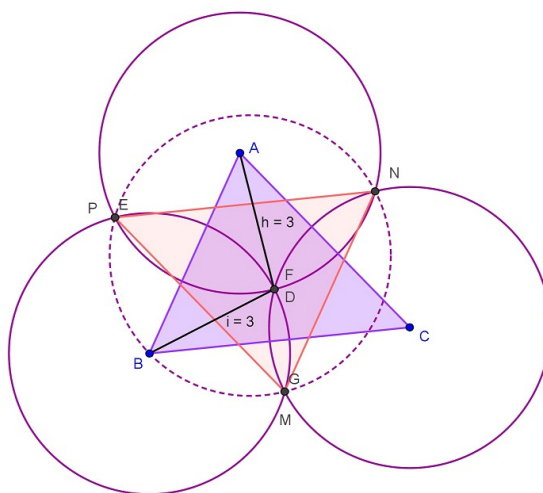
زمانی که با جئوجبرا این توابع را ترسیم می‌کنیم در مدت زمان کمتری نسبت به ترسیم با قلم و کاغذ این کار را انجام می‌دهیم، که این خود موجب گسترش و توسعه‌ی مسائل مناسب برای مطالعه و پژوهش می‌شود. ضمناً دانش‌آموزان در حین ترسیم و حل مسئله با نرم‌افزار نه تنها نگرانی نخواهند داشت، بلکه وقتی که تجربه‌ی آنها را در حین انجام کار، از آنها می‌خواهیم هم با علاقه به توضیح ترسیم خود می‌پردازند، هم با اشتیاق بیشتری به آن ادامه می‌دهند. اما نمی‌توان گفت که همه‌ی مسئله تنها همین است که گفتیم، بلکه اگر نتوانیم اثبات کنیم که چه اتفاقی حول صفر افتاده است یک محدودیت در یادگیری و تدریس پیش خواهد آمد. در اینجا این معلم است که مکمل نرم‌افزار خواهد بود و اثبات ریاضی مسئله را برای دانش‌آموزان در کنار ترسیم بیان می‌کند.

۷.۳ جئوجبرا در هندسه

۱.۷.۳ مسأله سکه طلایی

مسأله‌ی زیر توسط *Gheorghe Tztzeica* یک ریاضیدان رومانی کشف شد. این کشف ریاضیدان رومانی به عنوان یک کار فرهنگی و ریاضی بزرگ محسوب می‌شد. به دلیل اهمیت و نوع ابتکار و ابعاد آن بیشتر از ۲۰۰ مقاله و کتاب متعدد از او چاپ شده است (کتاب مسأله در هندسه^{۱۷} بیش از ۱۲ چاپ دارد). او با کشیدن دواير با یک "سکه طلا" بر روی یک کاغذ در حال بازی بود و یک مسأله که امروز آن را "پول طلایی" نامیده‌اند، کشف کرد. در واقع این نامگذاری برای آن است که سراسر جهان بتوانند یک چنین کشفیاتی را انجام دهند.[۲]

مسأله ۱.۷.۳. سه دایره‌ی متجانس با مراکز A, B, C را در نظر بگیرید که یک نقطه‌ی مشترک با نام D دارند. N, M, P را نقاط اشتراک هریک از دو دایره در نظر بگیرید (شکل ۱۴.۳).



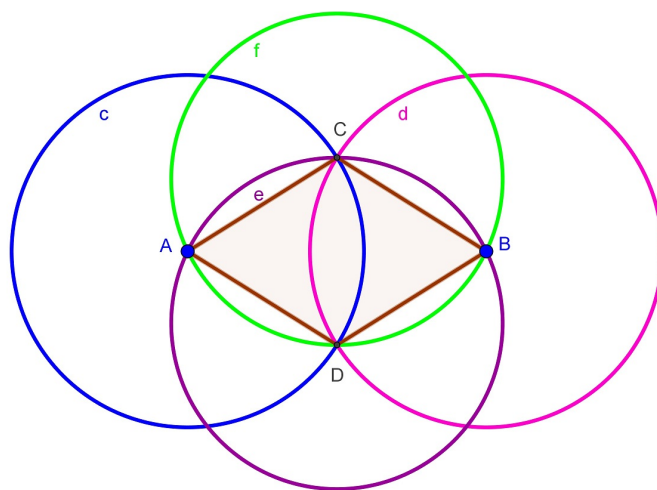
شکل ۱۴.۳: مسأله سکه ۵ دلاری در سال ۱۹۰۸ کشف شد

نشان دهید که دایره‌ی محیطی مثلث MNP با سه دایره با مراکز A, B, C متجانس است. به

^{۱۷}problem book in geometry

عبارت دیگر باید نشان دهیم که شعاع دایره محیطی MNP برابر شعاع سه دایره اول می‌باشد. (مرحله ۱): بطور کلی ثابت می‌کنیم که اگر دو دایره متجانس در دو نقطه همدیگر را قطع کنند، آنگاه نقاط اشتراک و مراکز دواير یک متوازی‌الاضلاع می‌سازند. همانطور که می‌بینیم d, c, b, a همه به طول ۵ واحد هستند. به طریق مشابه دواير e و f شعاع‌های برابر در معادله‌ی تحلیلی خود دارند (شکل ۱۵.۳).

(مرحله ۲): حال در جستجو و تلاش برای مرتب کردن تمام فرضیه‌ها و حدسیات مسأله

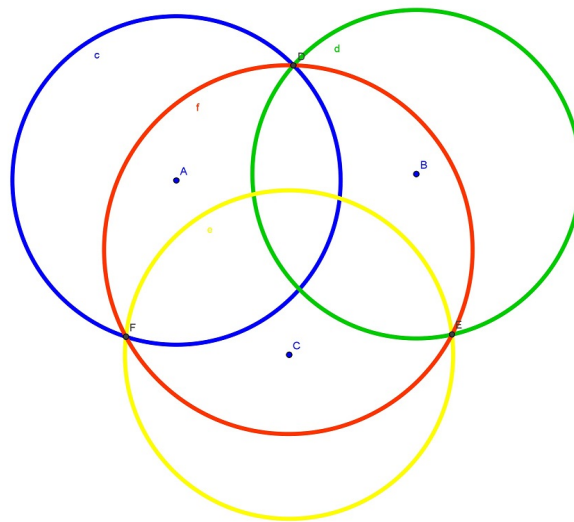


شکل ۱۵.۳: یک ساختار هندسی پویا با دو نقطه A و B

Tzitzeica هستیم (شکل ۱۶.۳).

ساختار توافقی ما با استفاده از جئوجبرا نمی‌تواند سه دایره همانطور که در فرضیه *Tzitzeica* هست، ایجاد کند (شکل ۱۷.۳).

ساختار را بصورت زیر توسعه می‌دهیم: ابتدا دو دایره، بعد یک پاره خط با طول شعاع این دو دایره، و سرانجام دایره ی سوم. در واقع مراحل ما یک دایره می‌کشد اگر و فقط اگر سه پارامتر مرکز، شعاع و نقطه ی ثابتی که دایره از آن می‌گذرد را داشته باشیم. همانطور که می‌توانیم طی فرآیند ساختاری ببینیم، شعاع دواير f, e, d, c را از ۱۰ واحد بدست می‌آوریم. ولی انحراف وجود دارد. در اینجا یک ساختار بهتر بدست آمد، اما مطلوب ما نیست. هرچند بعضی لوزی‌ها از شکل را با استفاده از نقاط اشتراک دواير ساختیم اما می‌بینیم که تعدادی متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌شوند که



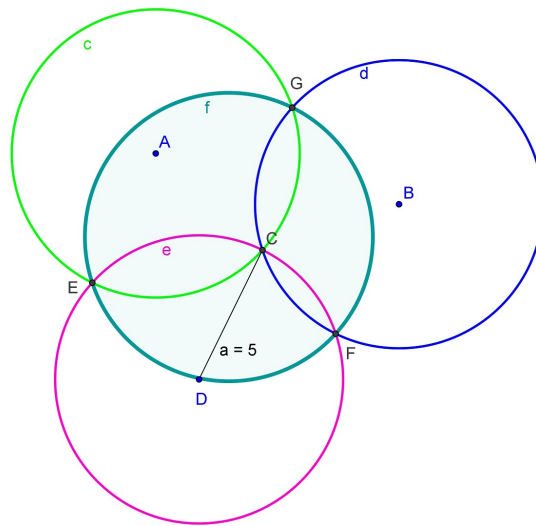
شکل ۱۶.۳: باید ۴ دایره مانند مسأله *Tzitzeica* داشته باشیم.

با هم برابرند. اما در اینجا تعدادی از حدسیات و انتظارات پیش بینی شده‌ی ما با اثبات‌های ریاضی دقیق سازگار نمی‌شود [۲]. با این مشاهده، شعاع دایره S را در معادله‌ی تحلیلی $r^2 = 24/03$ بدست می‌آوریم و سایر نتایج قابل پیش بینی مانند مساحت مثلث ABC یا مثلث GFE حدود $30/09$ واحد می‌باشد (شکل ۱۸.۳).

۲.۷.۳ روشهای یاددهی ریاضیات

یکی از مؤلفه‌های مهم آموزش ریاضی مؤثر، تدریس توانمند با توجه به مفاهیم و حتی روشهای چندگانه است که این روش را نمایش چندگانه می‌نامیم (گولسسن^{۱۸}، ۲۰۱۰). روشهای مختلف آموزش و یاددهی ریاضیات توسط آموزشگران مختلف مطرح شده است و دانش این روشها، در پیدا کردن يك استراتژی آموزشی بهتر مؤثر است. برای يك معلم استفاده از يك روش منحصر به فرد برای آموزش مناسب نمی‌باشد. معلم باید يك رویکرد آموزشی بعد از در نظر گرفتن طبیعت دانش‌آموزان، علایق و بلوغ فکری آنها و منابع در دسترس اتخاذ کند [۳].

^{۱۸}Gulsecen



شکل ۱۷.۳: ابتدا تلاش می‌کنیم سه دایره با یک نقطه مشترک منفرد (یکتا) رسم کنیم.

هر روشی مزایا و معایب خود را دارد و این وظیفه‌ی معلم است که تصمیم بگیرد کدام روش برای دانش‌آموزان بهترین است [۳]. بعضی از روشهای آموزش و یاددهی ریاضیات:

۱- روش سخنرانی (*Lectur method*):

۲- روش استنتاجی (قیاسی)، استقرایی (لمی) (*Inductive – deductive method*):

۳- روش راهبردی (روش کشف/ پرسش (تحقیق))

(*Discovery/Inquiry method*) *Heuristic method*):

۴- روش تحلیلی- ترکیبی (*Analitical – Synthetical method*):

۵- روش *Brain Storming*:

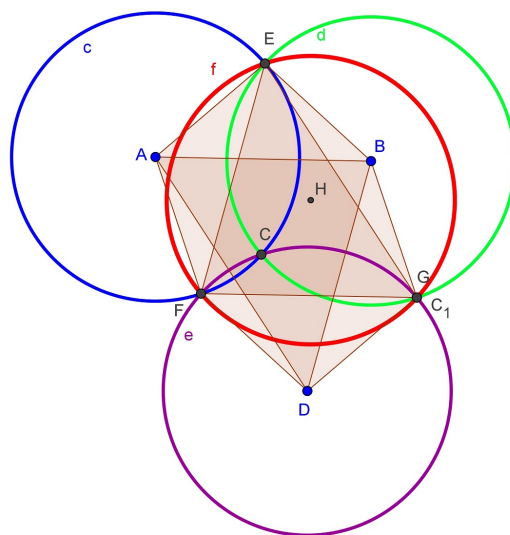
۶- روش *Think – Pair – Share*:

۷- روش *Learning by doing*:

۸- رویکرد حل مسأله *Problem Solving Approach*.

همه ی روشهای ذکر شده در بالا ممکن است به اندازه‌ی کافی مناسب برای همه‌ی سطوح آموزش ریاضیات نباشند. یک معلم بعد از دانستن و تحقیق در مورد همه‌ی روشها و مزایای آنها باید بتواند روش خود را با در نظر گرفتن خصوصیت خوب روشها بسازد. در نهایت روش یاددهی باید:

۱- حداکثر مشارکت دانش‌آموزان را تضمین کند؛



شکل ۱۸.۳: مناسب ترین ساختار

۲- از بهم پیوستگی به انتزاع پیش رود؛

۳- دانش در سطح فهم را فراهم کند [۳].

برای فهم بیشتر مطالب بالا با استفاده از ابزار *Slider* مکان هندسی را برای حل يك مسأله از هندسه نمایش می‌دهیم. در اینجا در هر دو مسیر تحلیلی و کاربردی، همراه با تحلیل نرم‌افزاری بررسی خواهد شد.

۳.۷.۳ مدل‌سازی يك مسأله‌ی مکان هندسی با استفاده از *GeoGebra*

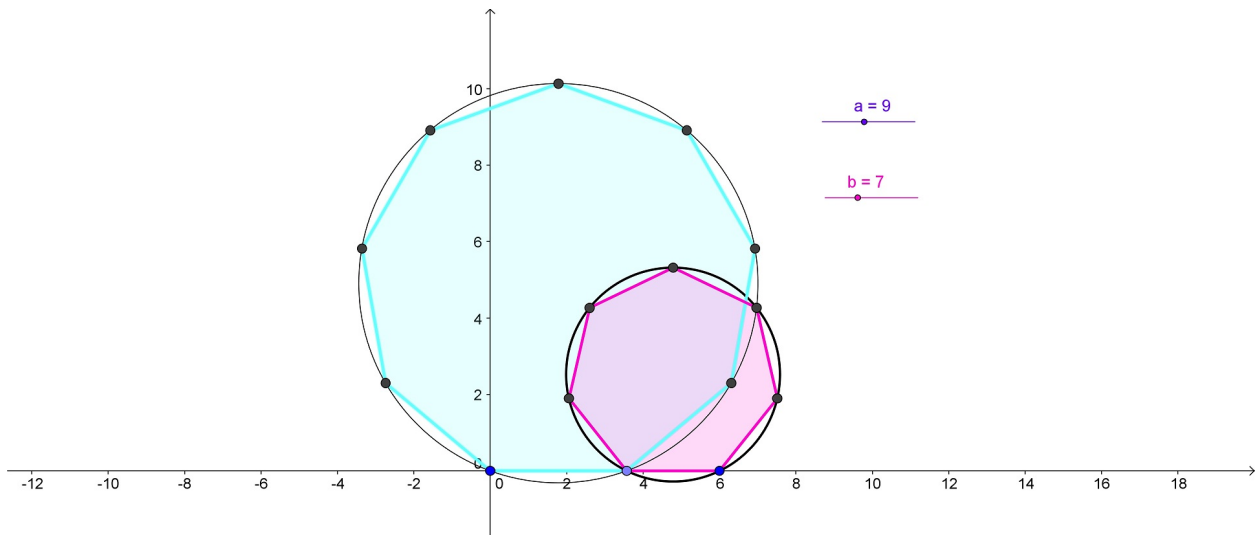
صورت مسأله: روی خط ثابت d نقاط ثابت A و B و نقطه‌ی متحرك M در صفحه π مطلوبند. و در صفحه π چندضلعی منتظم با طول ضلع $\overline{AM}$ و طول ضلع $\overline{BM}$ به ترتیب با m ضلع و n ضلع برای $m, n \in \mathbb{N}$ و $m, n \geq 3$ ساخته شده است. دایره‌های محیطی این چندضلعی‌ها در M و P همدیگر را قطع می‌کنند. مکان هندسی نقطه P خواسته شده است [۳].

برای حل این مسأله دو حالت $m = n$ و $m \neq n$ را در نظر می‌گیریم.

در هر دو حالت چندضلعی‌ها می‌توانند در يك طرف خط d یا هر کدام جداگانه در طرفین خط d

قرار بگیرند. خط d را به عنوان محور x ها با نقاط A و B با مقادیر ثابت a و b و نقطه M در نظر می گیریم که هر سه نقطه A ، B و M فقط مؤلفه های x دارند (شکل ۱۹.۳).

نرم افزار به ما اجازه می دهد که حدس راجع به مسأله را ترسیم کنیم، چندضلعی منتظم را با تعداد



شکل ۱۹.۳: شکل اولیه ی مسأله

اضلاع مشخص بسازیم، تعداد اضلاع چندضلعی ها را به آسانی تغییر دهیم، مکان هندسی نقطه معین P را ایجاد کنیم و در نهایت آن را تشخیص دهیم.

با استفاده از نرم افزار جئوجبرا نتایج زیر بدست می آید:

۱- اگر $m = n$ باشد و چندضلعی ها منتظم در يك نیم صفحه ی یکسان باشند مکان هندسی P از برخورد يك کمان با طول $\overline{AB}$ و کمان $\frac{360^\circ}{n}$ و نیم خطهای $\overline{XA}$ و $\overline{XB}$ بدست می آید. وقتی که M نیم خط $\overline{XA}$ را می پیماید یعنی $x \in (-\infty, a)$ دوائر مماس هستند و $P = M$. وقتی که M پاره خط $\overline{AB}$ را بپیماید یعنی $x \in [a, b]$ آنگاه P کمان APB را با کمان $\frac{360^\circ}{n}$ تعریف می کند. وقتی M پاره خط $\overline{BX}$ یعنی $x \in (b, +\infty)$ را می پیماید، دوائر مماس هستند و $P = M$.

فهمیدیم که خط MP زمانی که $x \in [a, b]$ از يك نقطه ی ثابت P_o می گذرد، جایی که P_o نقطه ی میانی کمان است که کمان AP_oB را به شکل دایره کامل می کند. یعنی کمان AP_oB به اندازه ی کمان $(\frac{360^\circ}{n} - 180^\circ)$ می باشد.

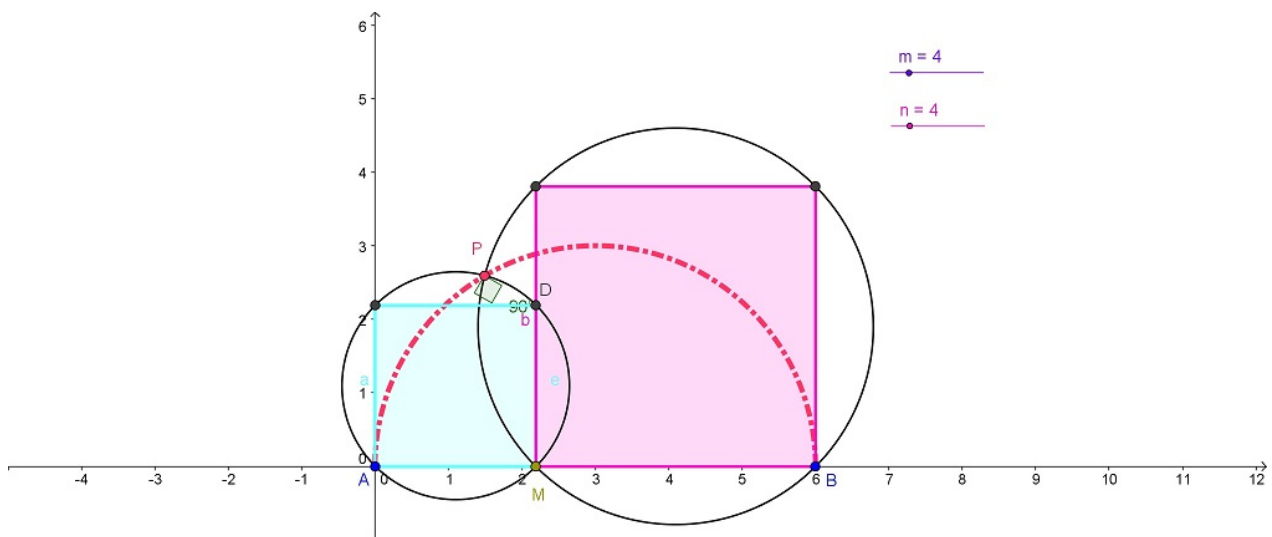
۲- اگر $m = n$ باشد و چندضلعی‌های منتظم در دو نیم صفحه‌ی متفاوت باشند. مکان هندسی p ، از برخورد کمان‌های $P'A$ و BP_o با اندازه‌ی کمان $(\frac{360^\circ}{n}) - 180^\circ$ بدست می‌آید و AB را قطعه قطعه می‌کنند و دواير بر هم مماس می‌باشند. وقتی M نیم خط $\overline{X'A}$ را می‌پیماید یعنی $x \in (-\infty, a)$ ، نقطه‌ی P کمان P_o را توصیف می‌کند و دواير مماس درونی هستند. وقتی M پاره خط $\overline{AB}$ را می‌پیماید یعنی $x \in [a, b]$ ، دواير مماس بیرونی هستند و $P = M$. وقتی M پاره خط $\overline{BX}$ یعنی $x \in (b, +\infty)$ را می‌پیماید، دواير مماس درونی هستند و نقطه‌ی P خم BP_o را توصیف می‌کند. نقاط $P_oP'_o$ مکان هندسی نیستند. ثابت می‌شود که خط MP از نقطه ثابت P'_o می‌گذرد وقتی که $x \in (-\infty, a)$ و از نقطه‌ی P_o می‌گذرد وقتی که $x \in (b, +\infty)$. در حالتی که $m = n = 4$ کمان مورد نظر مکان هندسی يك نیم دایره را مشخص می‌کند و کمان‌های AP'_o و BP_o از دو ربع دایره‌اند.

۳- اگر $m < n$ و چندضلعی‌های منتظم در يك نیم صفحه یکسان باشند. مکان هندسی نقطه‌ی P از برخورد سه کمان است: AQ^* با اندازه‌ی کمان $(\frac{1}{m} - \frac{1}{n})180^\circ$ که اندازه آن $\frac{360^\circ}{n}$ می‌باشد، AP_1B با اندازه کمان $(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})180^\circ$ و اندازه کمان AP^* برابر $\frac{360^\circ}{n}$ است و BP^* با اندازه کمان $(\frac{1}{m} - \frac{1}{n})180^\circ$. کمان‌های AP^* و AQ^* برابر هستند و به خط d وابسته‌اند. وقتی M نیم خط $\overline{X'A}$ یعنی $x \in (-\infty, a)$ را می‌پیماید، نقطه P کمان AQ^* را توصیف می‌کند. وقتی M پاره خط $\overline{AB}$ ، یعنی $x \in [a, b]$ را می‌پیماید نقطه P کمان AP_1B را توصیف می‌کند. وقتی M پاره خط $\overline{BX}$ یعنی $x \in (b, +\infty)$ را می‌پیماید، نقطه P کمان BP^* را توصیف می‌کند. نقاط Q^* و P^* نقاط مکان هندسی نیستند، با محدود کردن موقعیتهای نقطه P هنگامی که X به ترتیب به سمت $+\infty$ و $-\infty$ می‌رود.

۴- اگر $m < n$ باشد و چندضلعی‌های منتظم در دو نیم صفحه متفاوت باشند، مکان هندسی نقطه P از برخورد سه کمان AT^* ، $(\frac{1}{m} - \frac{1}{n})180^\circ$ و اندازه کمان آن $\frac{360^\circ}{n}$ ، APB با اندازه کمان $\frac{360^\circ}{n}$ و کمان BS^* که اندازه آن $\frac{360^\circ}{n}$ می‌باشد. وقتی M نیم خط $\overline{X'A}$ یعنی $x \in (-\infty, a)$ را می‌پیماید نقطه P کمان AT^* را توصیف می‌کند. وقتی M پاره خط $\overline{AB}$ یعنی $x \in [a, b]$ را

می‌پیماید نقطه P کمان APB را توصیف می‌کند. وقتی M پاره‌خط $\overline{BX}$ یعنی $x \in (b, +\infty)$ را می‌پیماید نقطه P کمان BS^* را توصیف می‌کند. کمان‌های AT^* و BS^* برابر و به خط d وابسته هستند. نقاط S^* و T^* با محدود کردن موقعیت‌های نقطه P وقتی X به ترتیب به سمت $+\infty$ و $-\infty$ می‌رود، نقاط مکان هندسی نیستند.

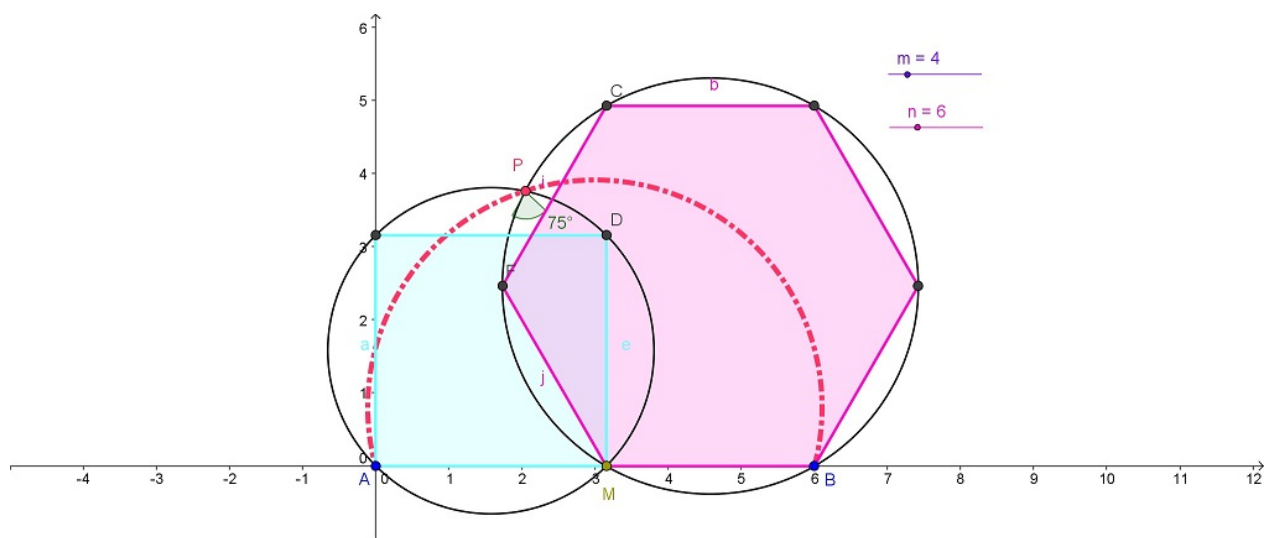
در حالت معین $m = 3$ و $n = 4$ مکان هندسی براساس (۳) کمتر از یک نیم دایره است. و کمان‌های AT^* و BS^* از (۴) روی دایره با قطر AB قرار می‌گیرند و اندازه‌ی آنها 90° می‌باشند. **مشاهده ۱:** دایره با قطر AB یا بخشی از آن تنها زمانی که $m = n = 4$ یا $m = 3$ و $n = 6$ یک مکان هندسی می‌شود زیرا معادله $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p}$ فقط همین جوابها را در $\mathbb{N}$ دارد (شکل ۲۰.۳). **مشاهده ۲:** اگر $(m = 3$ و $n = 4)$ یا $(m = 4$ و $n = 6)$ مکان هندسی یک $Loci$ است با



شکل ۲۰.۳: مسأله برای $m = n = 4$

کمان‌های نظیر 105° و 75° و 165° و 15° . تفاوت در این است که برای $m = 3$ و $n = 4$ نقاط محدود به T^* و P^* بر کمان به اندازه 75° قرار می‌گیرند و برای $m = 4$ و $n = 6$ بر کمان 105° قرار می‌گیرند. این حالات از حل معادله $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ در $\mathbb{N}$ نتیجه می‌شود. در مشاهده‌ای که کمان‌های 105° و 75° و 165° و 15° مناسب به نظر می‌رسند (شکل ۲۱.۳).

مشاهده ۳: بخشی از مکان هندسی می‌تواند برای جفت‌های مختلف چندضلعی‌های منتظم با تعداد اضلاع مختلف یکسان باشد.



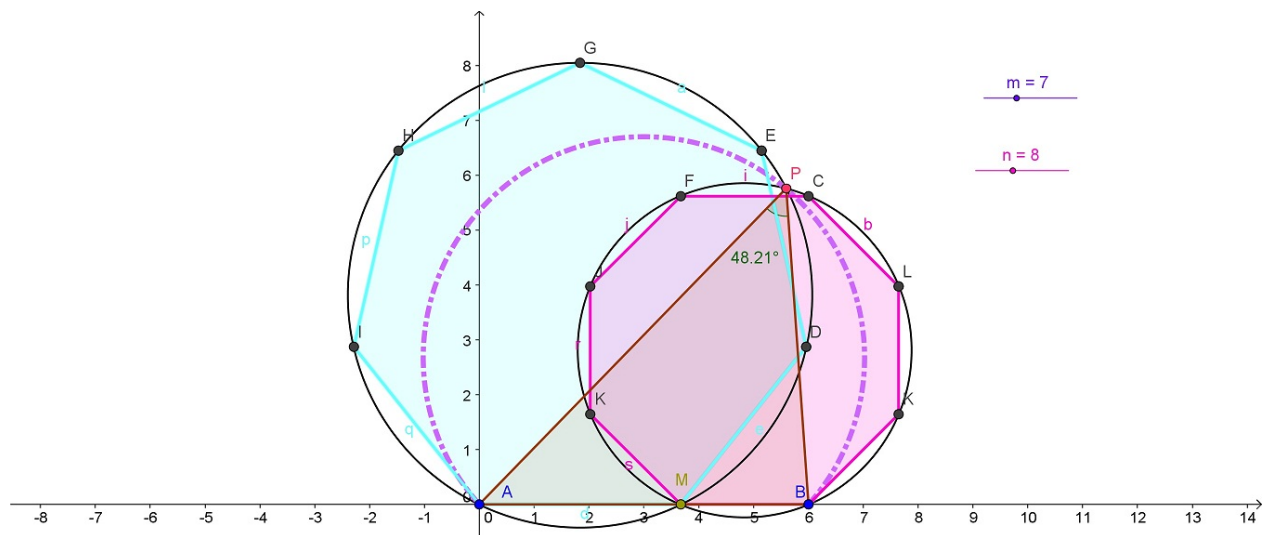
شکل ۷.۳.۲۱: وقتی $m = 4, n = 6$ با کمان 75°

توضیح بیشتر: معادله $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \neq \frac{1}{4}$ که در آن $m, n, p, q \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$ جواب $m = 2k + 1$ و $n = 2k + 2$ و $p = k + 1$ و $q = (2k + 1)(2k + 2)$ و $K \in \mathbb{N}$ و $K \geq 2$ برای $k = 3$ بدست می‌آورید: $m = 7$ و $n = 8$ و $p = 4$ و $q = 56$ (شکل ۷.۳.۲۲).
مشاهده ۴: کمان‌های APB و BP_o از حالت ۱ و حالت ۲ به ترتیب بر روی یک دایره هستند.
 کمان‌های APB و BP^* ، BS^* و APB ، AQ^* و AT^* از حالت ۳، ۴ به ترتیب بر روی یک دایره یکسان هستند.

مشاهده ۵: حالت $m > n$ به طور مشابه با حالت $m < n$ است.

مشاهده ۶: اگر صفحه‌ی π متغیر باشد. خط d ثابت می‌ماند. مکان هندسی p بوسیله دوران مکان هندسی ارائه شده در حالات (۱)، (۲)، (۳) و (۴) حول محور d بدست می‌آید.
نتیجه: مکان هندسی ارائه شده در چهار حالت تصاویر هندسی از مجموعه اعداد حقیقی ارائه می‌دهد که مسیر نشان داده شده بوسیله پیکان‌ها را می‌پیماید (شکل ۷.۳.۲۳).

مرحله به مرحله ساختار که تغییر عینی از یک زمینه ریاضی را ارائه می‌دهد، یک مسأله از مکان هندسی را برای مراحل بعدی دنبال خواهد کرد: ساختن اشکال هندسی بر پایه‌ی حدس‌های مسأله، به کار بردن تبدیلات هندسی، حرکت نقطه M در طول خط AB ، فهمیدن ارتباط بین ساختار اقلیدسی و اثبات، اثبات با استفاده از انیمیشن و کلیدهای تابعی آن و فهمیدن ارتباط هندسی و جبری در



شکل ۲۲.۳: وقتی $m = 7, n = 8$ با کمان 48.21°

اثبات‌های خیلی دقیق. يك درك از کاربردهای آموزشی كشف هندسه در محیطی پویا هم به عنوان يك ابزار تحقیق و هم به عنوان ابزار نمایش (اثبات) ارتباط بین آموزشگر ریاضی و متخصصین در *informatics* یکی از بهترین‌هاست. اصطلاح *Dynamic Info Geometry* می‌تواند يك روش تازه از آموزش ریاضی باشد. حل این مسأله و مسائل مشابه دیگر شروع تحقیقات آینده برای ریاضی کاربردی است.

فصل ۴

نتایج و پیشنهادات

۱.۴ مقدمه

امروزه معلمان برای طراحی سؤالاتی که تکنولوژی جدید را بکار گیرد و به عنوان یک راهنما برای یادگیرندگان باشد رقابت زیادی می‌کنند و به همین خاطر همکاری و مشارکت معلمان در بکارگیری تکنولوژی برای فهم مفاهیم هندسی سخت به نظر می‌رسد. به همین منظور باید امکانات بیشتری فراهم آورد تا بتوان با کار گروهی برای معلمان و دانش‌آموزان در سطح مناطق، کشور و قاره‌ای به نتایج درستی از کاربرد و استفاده از تکنولوژی رسید.

هر معلم باید آمادگی برای نقشه‌های درس روزانه و سالانه داشته باشد. نقشه‌های سالانه دروس توسط گروهی از اساتید دانشگاه در چارچوب برنامه‌ی آموزشی ثابت زیر نظر وزارت آموزش و پرورش آماده می‌شوند. نقشه‌های روزانه توسط خود معلمان کلاس آماده می‌شوند و بعد از آن به تأیید گروهی از اساتید دانشگاه می‌رسد که آنها را بکار می‌برند. بر این اساس آماده کردن نقشه‌های معلمان برای الگوهای متفاوت می‌تواند مفید باشد.

اگر معلمان خود را به استفاده از تکنولوژی و فعالیتهای تکنولوژی محور ملزم کنند، آنگاه این فعالیت‌ها ضمن توسعه، تحت یک برنامه‌ی خاص تنظیم می‌شوند و سپس به صورت درست و کاربردی مورد استفاده قرار می‌گیرند. هنگامی که تحت فعالیت‌های کلاسی معلمان، یادگیری

ضعیف دانش آموزان مشخص می شود به صورت طبیعی فعالیت های تکنولوژی محور به جای فعالیت های سنتی طراحی می شوند. در سال ۲۰۰۱ مویر اشاره می کند که معلمان مدارس در تدریس خود تمایل به دستکاری مسائل دارند، چرا که نوعی بازی می باشد و این امر برای دانش آموزان هم در یادگیری و هم در حل مسائل به دلایل شناختی و آموزشی خوشایند است. این دیدگاه یک تحقیق گسترده بین تمرین کلاسی و تحقیق در آموزش ریاضی امروز است، به عنوان اینکه استفاده از دستکاری برای افزایش فهم مفاهیم است. از این رو استفاده از تکنولوژی که با استفاده از یک لغزنده به صورت ساده این کار را انجام می دهد مناسبتر می باشد.

تحقیقات نشان می دهد که پنداشت و گمان دانش آموزان، نقش بسزایی در فرآیند یادگیری آنها دارد تا زمانی که به کشف مفاهیم ریاضیات موفق می شوند، و این مطلب بهتر شدن تکنیک های تدریس برای معلمان را به دنبال دارد. روش تفکر هندسی در مفاهیم هندسی با استفاده از یک DGS به یک کلاس کارگاهی نیاز دارد. تکنیک رقابت دانش آموزان در سن ۹ سالگی کاملاً ساخته می شود و سریعاً شروع به ساخت حدس می کنند که باید پاسخی برای آن باشد.

هوئیس و جونز (۱۹۹۸) بیان می کنند که DGS دو کار عمده انجام می دهد:

- ۱- تعمیم قضایای هندسی به عنوان یک هدف؛
- ۲- اجازه می دهد که دانش آموزان درستی حقایق هندسی خود را توضیح دهند.

۲.۴ تأثیر *Cabri* بر سطوح استدلال دانش آموزان

یافته های محققان نشان می دهد که محیط یادگیری *Cabri* کیفیت استدلال برای اثبات های هندسی دانش آموزان را بهتر می کند. همچنین بر یادگیری دانش آموزان سطوح پایین نسبت به سطوح بالاتر تحصیلی مؤثرتر است. یک تحقیق جامع نشان داده است که محیط *Cabri* غالباً برای دانش آموزان متوسطه به بالا مفید می باشد (حادث، هرشکویتز، شوارز، هولزل، جونز، لویز، لیونگ، مارادس، گوتیز، ۲۰۰۰) و اغلب بر یادگیری مطالب هندسی مؤثر است (حادث، هرشکویتز، شوارز، هیلای، هوئیس، ۲۰۰۰).

یک نتیجه‌ی بسیار جالب آن است که دانش‌آموزانی که با استفاده از محیط Cabri هندسه را یاد می‌گیرند قدرت استدلال و اثبات مطالب هندسی آنها به مراتب بالاتر از آنهایی است که هندسه را بدون Cabri یاد می‌گیرند. همچنین قدرت اجرا و نمایش مطالب هندسی را برای این دانش‌آموزان افزایش می‌دهد. ماهیت اصلی محیط Cabri بیشتر ایجاد علاقه و انگیزه برای دانش‌آموزان طری فرآیند یادگیری در مقایسه با یادگیری بدون Cabri است (حادس، هرشکویتز، شوارز، ۲۰۰۰، هولزل، لابورد، ۲۰۰۱). نقش اساسی Cabri بیشتر در بهبود استدلال دانش‌آموزان در هندسه است. و اینکه دانش‌آموزان بطور مستقیم تفکر می‌کنند و حدسیات خود را برای اثبات فرضیات خود که به طور آزمایشی ترسیم نمودند، فرموله و نگاه می‌کنند. همچنین باعث پیشرفت دانش‌آموزان در به خاطر آوردن و بیان قضیه‌های هندسی به عنوان یک واسطه در یادگیری قضیه‌های هندسی است (ماریوتی، ۲۰۰۱، ۲۰۰۰).

ترسیم برخی توابع در Cabri که مورد استفاده می‌باشد برای کنترل درستی یک ساختار، وقتی که تصویر به درستی ترسیم نشده است ویژگی تئوری پیشنهاد می‌کند. در واقع دانش‌آموزان علائم بیرونی Cabri را درون‌سازی می‌کنند و با تغییر آنها به علائم درونی روانشناسی بطور مستقیم بر روی توسعه‌ی فرض و اثبات بر روی تفکرشان تأثیر می‌گذارند. و با استفاده از این محیط پویا به خوبی یک گذار از حالت تجربی به تئوری در اثبات‌های هندسی ریاضیات بوجود می‌آید.

Cabri به عنوان یک پل برای شکاف بین مفاهیم تجربی و اثبات تئوری است (ماریوتی، ۲۰۰۰). استفاده از این نرم‌افزار در بالابردن مهارت‌های دانش‌آموزان برای بهبود و توجیه یک موضوع آموزشی مناسب است. برخی از محققان معتقدند که استفاده از Cabri مانعی برای توسعه‌ی اثبات‌های رسمی خواهد شد، چون دانش‌آموزان مجبور می‌شوند که یک مسأله را بطور کامل بر روی صفحه‌ی نمایش بررسی کنند و متقاعد به درستی فرضیاتشان می‌شوند (هانا، ۲۰۰۰).

استفاده از Sketchpad هم به عنوان یک نرم‌افزار هندسه پویا از سوی NCTM^۱ برای کلاس ۳ تا ۱۲ پیشنهاد شده بود (NCTM، ۲۰۰۰). تحقیقات نشان می‌دهد که استفاده از Sketchpad به طور مثبتی بر موفقیت دانش‌آموزان (دیکسون، ۱۹۹۵، لستر، ۱۹۹۶، باتیستا، ۲۰۰۲، هولبراندز،

^۱ National Council of Teachers of Mathematics

۲۰۰۷)^۲ و فهم مفاهیم (فریکرینگ،^۳ ۱۹۹۴) و تشویق دانش‌آموزان برای بکارگیری تکنولوژی (یوسف،^۴ ۱۹۹۷) مؤثر است. و اینکه بیشتر روشهای تدریس پیش از خدمت هندسه برای معلمان استفاده از *Sketchpad* را تأیید می‌کنند (گروور، کنز،^۵ ۲۰۰۰).

سیستم‌های جبری کامپیوتری *Carbi* و *sketchpad* ابزارهای تکنولوژی قوی برای تدریس ریاضیات‌اند. این بسته‌های نرم‌افزاری برای تقویت کشف، تصور و آزمایش در تدریس ریاضیات می‌توانند مورد استفاده شوند. به هر حال محققان اظهار دارند که برای اکثر معلمان، مشکل اصلی این است که چگونه تکنولوژی را برای تلفیق تکنولوژی با تدریس بکار بست.

GeoGebra ۳.۴

استفاده از جئوجبرا یکی از راه‌حل‌های پیشنهادی برای کاربرد تکنولوژی در تدریس ریاضیات مدارس و دانشگاهی است. جئوجبرا به سرعت محبوبیت و شهرت زیادی در میان معلمان و محققان در اطراف جهان پیدا کرده است، چون یک نرم‌افزار پویای ریاضیات است که به آسانی به کار برده می‌شود و برخی مفاهیم متفاوت ریاضیات را ترکیب می‌کند. در مجموع به خاطر ماهیت بازکرد بودن، کاربرد آن در میان کاربران انجمن‌های مربوطه به طور وسیعی توسعه یافته است، همچنین خود نرم‌افزار در حال ویرایش است.

دانش‌آموزان برای استفاده از جئوجبرا به عنوان یک ابزار نمایش به اهداف واضح ریاضیات نیاز دارند. برای تعدادی از موضوعات ریاضیات، نمایش می‌تواند موجب اثبات قضایایی شود که با برهان خلف، استقراء یا روشهای دیگر انجام شده‌اند. اما تفاوت در اثباتهای هندسی بیشتر می‌باشد، چون این اثبات‌ها توضیحی می‌باشند.

جئوجبرا به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا احساس شهودی، تجسم فکری و تصور مفهومی بهتری از

^۲Dickson, Lester, Batista, Holebrandz

^۳Freckring

^۴Yousif

^۵Goose, Kenze

موضوعات ریاضی و فرایندهای آن، بخصوص در هندسه و جبر داشته باشند. در واقع با این نرم افزار می توان مفاهیم ریاضی را در سطوح مختلف ریاضیات بیان کرد. زیرا هر معلم خود بیان می کند که چگونه از این نرم افزار استفاده کند. همچنین می توان کاربردهای تکنولوژی را توسعه داد و آن را برای آموزش پیش و پس از خدمت معلمان طوری بنا کرد که بتوانند به آن دسترسی داشته باشند. براساس برخی مطالعات، پیوند بین نمایش گرافیکی (نقطه، پاره خط و ...) و موضوعات جبری نظیر (مختصات، طول و ...) به دانش آموزان فرصتی برای کشف فرمول هایی از محیط و مساحت را می دهد. در واقع دانش آموزان به یک بینش عمیق به عنوان یک قرارداد بین هندسه و جبر خواهند رسید. توجه به این نکته که هنگام چنین مطالعاتی باید کار اکتشافی بررسی شود، ضروری به نظر می رسد.

در کلاس های درس می توان همزمان با معلم از استراتژی های خاص برای تدریس و یادگیری شخصی به نام معلم - دانش آموز استفاده کرد که با کمک او دانش آموزان در یک جلسه گروهی به جای یک سیستم اصلاحی - اساس فقط تمرین می کنند (مای فیلد^۶، بارکو^۷، ۱۹۹۵، فرایکلم^۸، ۱۹۹۸). جئوجبرا می تواند یک *Platform* کارآمد برای یادگیری باشد، یک نرم افزار که با کار با آن می توان مثالهای زیادی را برای حساب، جبر، هندسه و حساب دیفرانسیل و انتگرال طراحی کرد و سپس این مثالها را توسعه و تعمیم داد [۲]. این امر یک جایگاه خاص در *Platform* پیدا خواهد کرد، تا آنجا که همه ی کاربران قبول می کنند که تحقیق برای طراحی و توسعه ی این مثالها یک راه انتقادی ساختاری، نه اغلب منحصر و خاص می باشد. با بکارگیری جئوجبرا دانش آموزان می توانند مفاهیم خلاصه را ببینند، با همدیگر و با معلمان ارتباط برقرار کنند و ریاضیات را کشف کنند. قابلیت تشخیص و تعیین راه حل های دانش آموزان به صورت الکترونیکی علاقه و انگیزه ی دانش آموزان به ریاضیات را تقویت می کند و توانایی های قابل درک دانش آموزان را توسعه می دهد [۲]. همچنین محیط های یادگیری *Online* به دانش آموزان اجازه می دهد تا بیشتر از ریاضیات بهره مند شوند. برخی فعالیت های مناسب با جئوجبرا:

۱- روش های جدید و یادگیری ریاضیات با استفاده از جئوجبرا؛

^۶Mayfield

^۷Barko

^۸Frykholm

- ۲- تأثیر استفاده از جئوجبرا در موفقیت دانش‌آموزان با مثال‌های متنوع؛
 - ۳- اثبات‌های جبری و هندسی با استفاده از جئوجبرا؛
 - ۴- برانگیختن و تشویق دانش‌آموزان برای یادگیری ریاضیات با جئوجبرا؛
 - ۵- تجسم فکری ساختمان منحنی‌های پارامتری متفاوت؛
 - ۶- مشتق و انتگرال با استفاده از جئوجبرا و فهم بهتر این مطالب ریاضیات.
- و غیره.

۱.۳.۴ نتایج استفاده از جئوجبرا

- ۱- جئوجبرا بیشتر مورد استفاده دانش‌آموزان است و با یک ماشین حساب گرافیکی مقایسه و یک محیط ساده را پیشنهاد می‌کند. همچنین فهرست‌های چند زبانه و خط فرمان برای کاربر دارد.
- ۲- جئوجبرا فعالیت‌ها و پروژه‌های دانش‌آموزان را با نمایش‌ها و آزمایش‌های مختلف انجام می‌دهد و راهنمایی برای یادگیری کشف در ریاضیات است.
- ۳- خلاقیت دانش‌آموزان جنبه‌ی شخصی پیدا می‌کند که این کار توسط پنجره‌ی *Redefine* صورت می‌گیرد (اندازه فونت، زبان، کیفیت گرافیک، رنگ، مختصات، ضخامت خط، سبک خط و دیگر چهره‌های نمایش).
- ۴- یکی از اهداف مهم طراحی جئوجبرا کسب فهم ریاضیاتی دانش‌آموزان است. دانش‌آموزان به سادگی می‌توانند تفاوت‌ها را با کشیدن اشکال آزاد و با تغییر آنها با استفاده از لغزنده ببینند. همچنین با استفاده از یک تکنیک برای دستکاری اشکال آزاد این تغییرات را تعمیم می‌دهند و در نهایت یاد می‌گیرند که چگونه اشکال وابسته با توجه به اشکال آزاد تغییر خواهند کرد. در این روش دانش‌آموزان فرصتی برای حل مسأله با بررسی روابط پویای ریاضیات دارند.
- ۵- یادگیری گروهی که یک تعریف جدید برای روش ریاضیات است (دویسکی^۹، شویجدورف^{۱۰}، ۲۰۰۴).

^۹Dubisky

^{۱۰}shwigerdorf

نوشته‌های درسی باید با یک فعالیت جهت‌دار و مؤثر در کلاس جایگزین شوند. نقش اولیه‌ی تدریس با درس و سخنرانی و توضیح روشهای دیگر ریاضی برای انتقال دانش ریاضیات نیست، بلکه ایجاد موقعیت‌هایی برای دانش‌آموزان است که ساختار برداشت‌ها و تفسیرهای ذهنی مورد نیاز آنها را پرورش دهند. حال آنکه جئوجبرا یک فرصت خوب برای یادگیری گروهی و کاربردهای حل مسأله‌ی گروهی برای تدریس مفاهیم ریاضی در سطوح مدارس و دانشگاهی فراهم می‌کند و اینکه ارائه‌های فردی - گروهی دانش‌آموزان در قالب گروههای کوچک موجب تدریس مؤثر همه‌ی کلاس، با نمایش‌های مختلف می‌شود.

۶- ورودی جبری به کاربر اجازه‌ی ساخت اشکال جدید را می‌دهد، یا اینکه از طریق خط فرمان نیز می‌توان اشکال جدید را بوجود آورد. همچنین فایل‌های صفحه‌ی کار به آسانی مانند صفحات وب منتشر می‌شوند.

۷- تشویق معلمان: جئوجبرا مشوق معلمان است و با بکارگیری تکنولوژی برای تجسم فکری ریاضیات، بررسی تحقیق در ریاضیات، کلاس‌های ریاضیات مؤثر بر روی سایت، ریاضیات و کاربردهای آن و ... به معلمان انگیزه بیشتری می‌بخشد.

۲.۳.۴ نکات ضعف استفاده از جئوجبرا

۱- دانش‌آموزان بدون تجربه‌ی برنامه‌های قبلی به سختی وارد فرمان‌های جبری در جعبه ورودی می‌شوند. اگرچه فرمان‌های پایه برای یادگیری سخت نمی‌باشند، اما دانش‌آموزان ممکن است احساس خجالت کنند یا کاملاً گیج شوند و متوجه نشوند چه چیزی انجام دهند و چه برای انجام دارند.

۲- تعدادی از روشهای اصولی و کاربردی (به عنوان مثال کشف و تجربه‌ی مستقل) نمی‌تواند برای تعدادی از دانش‌آموزان مناسب باشد.

۳- به عنوان یک تکنیک، نرم‌افزار جئوجبرا پنجره‌ی کار برای انیمیشن‌سازی ندارد و بنابراین برای ویرایش‌های جدید باید توجه خاصی به انیمیشن سازی شود.

۴- توسعه و ویرایش‌های جدید نرم‌افزار جئوجبرا شامل بیشتر چهره‌های نمادین از سیستم‌های جبری کامپیوتری خواهد بود که بیش از پیش امکان نمایش برخی کاربردهای پیچیده در آنالیز ریاضی را

آسان می‌کند.

۵- محدودیت‌های تحقیق برای تأثیر جئوجبرا بر روی تدریس و یادگیری ریاضیات.

۳.۳.۴ مشکلات

برخی معلمان برای استفاده از تکنولوژی در تدریس رغبتی ندارند، چون علاقه‌ی آنها بیشتر به روش تدریس و یادگیری دانش‌آموزان برای مهارت‌ها و محاسبات پایه‌ای بر مبنای روش خودشان است. برخی ادعا می‌کنند که تکنولوژی باید با تدریس سنتی بهم پیوسته شود و اینکه استفاده از تکنولوژی می‌تواند مانعی برای یادگیری دانش‌آموزان پیشین با تسلط بر روش مهارت‌های پایه‌ای باشد. می‌توان با توصیف چگونگی ساختار ابزارهای جئوجبرا نقشه‌ی درس خود را طرح و بیان کرد. بیشتر دروس شامل فعالیت‌های مرتبط با هم و با موضوعات و روابط ریاضیات‌اند و بیشتر، دانش آموز - محور هستند. برخی معلمان به محدودیت استفاده از فعالیت پویا اشاره می‌کنند و قصد ندارند به دانش‌آموزان اجازه دهند برای مفاهیم ریاضیات، با این فعالیت‌ها کشف کنند یا دلیل بیاورند. احساس بی‌ثباتی بخاطر فهم شخصی هر معلم و دیدن درجات علمی دیگر معلمان که برخی احساس می‌کنند برای تدریس بهتر، به مبارزه طلبیده شدند، استرس‌آور و کیفیت آموزش از طریق جئوجبرا را پایین می‌آورد. دروسی با فعالیت‌های معلم - محور هستند که در کنار آن دانش‌آموزان به موضوعات اندازه، زاویه یا پاره‌خط برای درستی جواب یا کنترل طراحی خود بر روی کاغذ می‌پردازند. در تعدادی دروس با فعالیت‌های غیریپویا مشخص شده است که فهم ناقص از ابزارهای جئوجبرا یک عامل برای عدم توانایی این فعالیت‌ها و حل آنها بوده است. معلمان در طراحی نقشه‌هایی برای دروس، با جئوجبرا تجربه کسب می‌کنند و تجربیات آنها به طور مثبتی مؤثر بر نظرات معلمان آینده درباره‌ی استفاده از تکنولوژی در تدریس و یادگیری ریاضیات دارد. به هر حال برخی معلمان به علت کمبود تجربه‌ی تدریس و تجربه‌ی تدریس با تکنولوژی، سعی در حفظ روشها و نظرات متداول تدریس ریاضیات، وابسته به تجربیات شخصی خود مانند یک دانش‌آموز دارند.

ابزارهای جئوجبرا در اغلب دروس معلمان مورد استفاده است و محدود به دانش ریاضی یا عدم توانایی استفاده از ابزارهای جئوجبرا در مفاهیم نیست.

۴.۴ فرآیندها و اثرات آموزشی: نمایش ویدیو - مرکز

با وجود اینکه برخی معلمان بیشتر در پی فرصت‌های جدید برای تدریس می‌باشند اما طراحی سئوالات ریاضی از طریق جئوجبرا و فرآیندهای حل مسأله و نمایش رابطه‌ی عملی این مسائل برای تدریس ریاضیات و استفاده از ابزارهای جدید برای ترکیب روشهای جدید تفکر مؤثر است. به همین خاطر امروزه از نمایش‌های ویدیویی برای کاربرد و اجرای جئوجبرا استفاده می‌شود. این ویدیوها یک شکل غیرهمزمان از آموزشی را فراهم می‌کنند که تأثیر تدریس با جئوجبرا را نشان می‌دهد. بسیاری از معلمان ریاضیات، تدریس‌های متفاوت را تجربه کردند و دانش محتوایی ریاضیات در کنار روش‌ها، باورها و رفتارهای متفاوت از تدریس ریاضیات دارند. برخی از معلمان نیز اعتقاد به وجود یک مداخله‌ی فراشناختی دارند که معلمان می‌توانند در کلاس درس حین انجام فعالیت‌های کلاسی آن را تشخیص دهند. اما همیشه این تشخیص‌ها درست نیستند و عمدتاً به دو دلیل معلمان قادر به این تشخیص نمی‌باشند:

- ۱- برخی از معلمان به خاطر مشکلاتی که در بکارگیری تکنولوژی دارند، مقصر دانسته می‌شوند؛
 - ۲- برخی دیگر دچار افت می‌شوند که این افت در نتیجه‌ی سخت‌گیری به آنهاست.
- اما می‌توان آموزش این نرم‌افزار را چنان به معلمان داد که هر کدام معلم خودشان باشند و از چالش‌های یادگیری آگاه شوند. از دید ویگوستگی^{۱۱} یادگیری باید بصورت آموزش و پرورشی چارچوب‌بندی شود. ارائه‌ی برخی راهبردها برای دانش‌آموزان و معلمان قبل از استفاده از جئوجبرا ضروری می‌باشد. با استفاده از سایت حمایت شده برای آموزش جئوجبرا معلم یک وب‌کار مؤثر طراحی می‌کند که با طراحی و حل مسأله، حمایت‌های آموزشی فراهم می‌کند. استفاده از پرسشنامه نیز برای معلمان، چارچوب کار را مشخص می‌کند.

^{۱۱} Vygotsky

۵.۴ استفاده از جئوجبرا چه بازتاب‌هایی در کلاس درس معلمان دارد؟

یک مطلب جالب آن است که برخی احساس می‌کنند که چون جئوجبرا به صورت ریاضی ساخته نشده است بیشتر برای آنها سخت است. آنها فکر می‌کنند که جئوجبرا یک شکل جدید از ریاضیات است که برای آن سبک خاصی در نظر گرفتند. در یک جمله "جئوجبرا راهی را برای دانش‌آموزان به داخل ریاضیات باز می‌کند". معلمان ضمن خدمت در استفاده از جئوجبرا با روشهای گوناگون، حوزه‌ای از کشف ریاضیات شخصی، نتایج بهتر به سوی ریاضیات و تدریس آن و بازتاب‌های وابسته به برنامه آموزش و پرورش، آشنا، و از آنها بهره‌مند می‌شوند.

بازسازی دوباره‌ی آموزش ریاضیات با یکپارچگی ریاضیات و تکنولوژی به خوبی مشخص می‌شود. حدس برخی ایده‌های بزرگ برای معلمان و دانش‌آموزان با استفاده از جئوجبرا فراهم می‌شود و حدس این ایده‌ها بدلیل استفاده از برخی وسایل آموزشی و لازمه‌ی این وسایل، موجب به تصویب رساندن تدریس با آن وسایل می‌شود.

کامل کردن سیستم‌های یادگیری پویا از قبیل *Geometer – Sketchpad* و *Cabri – Geometer* و *GeoGebra* و دیگر ابزارهای قابل درک از قبیل *Spreadsheets* و سیستم‌های جبر کامپیوتری در مسابقات ریاضی و گسترش محیط‌های *Online* فرصت‌های بیشتری برای دانش‌آموزان از لحاظ دسترسی و افزایش علاقه‌ی آنها به سوی ریاضیات، تشویق و به پیش بردن توانایی‌های قابل درک آنها فراهم می‌کند. [۳]

۶.۴ پیشنهادات

۱- فراهم کردن حمایت شناختی در خود آگاهی معلمان که بازتاب‌های مثبت با استفاده از جئوجبرا داشته باشند یا هر ابتکار جدیدی که هر کدام ملزم به استفاده از جئوجبرا شود.

- ۲- توسعه‌ی مشارکت‌های پیوسته و ویدیو - اساس.
- ۳- توسعه‌ی نمایش مشاوره‌های فردی بصورت ویدیویی که منجر به حل مسائل ریاضیات می‌شوند.
- ۴- حمایت و تقویت معلمان در استفاده از جئوجبرا برای دانش‌آموزان.
به عنوان مثال آنها کشف ریاضیاتی دانش‌آموزان را مشاهده می‌کنند، درباره خود به عنوان یک مسأله حل‌کن به یادگیری خود می‌افزایند و استراتژی‌ها را برای حمایت از یادگیری دانش‌آموزان توسعه می‌دهند.
- ۵- کاربرد واقعی مسائل ریاضیات در یادگیری جئوجبرا.
برخی فعالیت‌ها با جئوجبرا که می‌تواند هم موضوع پایان‌نامه، هم راه‌گشای تحقیقات علمی باشد:

 - ۱- مدلسازی مطالعات جغرافیایی با جئوجبرا؛
 - ۲- مشخص کردن فواصل بر روی نقشه‌های جغرافیایی و مدلسازی آنها؛
 - ۳- تحلیل پویای پراکندگی آلوده‌کننده در آبهای سطحی؛
 - ۴- ترکیب کار زمین‌شناسان، مهندسان و جغرافیدانان برای گسترش مطالعات نوین در مورد جریان آب زیرزمینی در مدل‌های حمل و نقل؛
 - ۵- استخراج بهتر یافته‌های تازه در مهندسی محیط و ترکیب آنها؛

- ۶- اصطلاح *Dynamic Info Geography* می‌تواند یک موضوع نوین برای توسعه‌ی نرم‌افزار جئوجبرا باشد؛
- ۷- روش تولید مسائل: (*Generating Problem*) و بسیاری موضوعات دیگر.
همه‌ی مسائل با جئوجبرا به بهترین شکل نمایش داده نمی‌شوند. مسائل باید به طور منظم انتخاب و طراحی شوند و براساس بلوغ ریاضیاتی دانش‌آموزان، با برقراری یک سطح مشخص از انعطاف‌پذیری شناختی، وابسته به آموزش و پرورش انتخاب و طراحی شوند. اینجاست که در طراحی روشهای کلی به اهمیت تئوری‌های آموزشی توجه داریم. زمانی که تکنولوژی‌های پویا با موضوعات ریاضیات و برنامه‌ی آموزشی به هم پیچیده می‌شوند، تلاش برای توسعه‌ی رسمی استفاده از تکنولوژی اغلب سخت‌تر می‌شود. در واقع در اینجاست که جئوجبرا به کنترل پیچیدگی این ارتباط و فراهم کردن تجربیات یادگیری عینی برای معلمان و دانش‌آموزان کمک بیشتری می‌کند.
کانون تحقیقات امروزه بررسی این موضوع است که جئوجبرا به دانش‌آموزان در کشف، بیان و

ارتباط فرضیات هندسی کمک می‌کند. در واقع مسائل هندسی ابتدایی و ساده‌ای هستند که نتایج آنها با جئوجبرا بررسی می‌شوند و سئوالات مناسبی را برای معلمان بوجود می‌آورد، که ضوابط جدید با نتایج مطلوب برای دانش‌آموزان فراهم می‌کنند. در پایان اینکه معلمان آینده در دوره‌هایی از روشهای پیش‌نیازی یادگیری، توسعه و تدریس با تکنولوژی در یک کلاس واقعی، ارزیابی و بازتاب بر روی تدریس خود و اشتراک تجربیات با همکلاسی‌ها حین اجرا، تحت نظارت اساتید ثبت‌نام کنند.

به هر حال تحقیقات کمتری بر روی اینکه چرا، چگونه و کجا معلمان استفاده از تکنولوژی را در کلاس‌های درسی انتخاب می‌کنند، شده است. این امر مخصوصاً به عنوان راهنمایی برای اجرای استراتژی‌ها، برای برنامه‌ی آموزشی، کتاب درسی و برنامه‌های نرم‌افزار و همچنین آموزش پیش از خدمت و ضمن خدمت معلمان و دانش‌آموزان است. و پیشنهاد می‌کنیم اساتید معلمان و دانش‌آموزان بصورت پیوسته و گروهی در این زمینه کار کنند. در نهایت اینکه هدف از تألیف کتابهای مختلف در زمینه‌ی نرم‌افزارهای هندسی، توسعه‌ی کلاسهای هندسه طبق برنامه آموزشی جدید، بدون صرف زمان زیاد است.

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی

instruction	آموزشی
prove	اثبات
implementation	اجرا
conception	ادراک، تصور
evaluation	ارزیابی
strategy	استراتژی
induction	استقرا
deduction	استنتاج
intersection	اشتراک
exploration	اکتشاف
exploratory	اکتشافی
manipulative	بادهستکاری
collaborate	باهم کار کردن
reflection	بازتاب
open- source	بازکد
curriculum	برنامه‌ی آموزشی
platform	برنامه‌ی کار، سطح فکر
utilize	بکارگیری

compass	پرگار
expressive	پرمعنی
post service	پس از خدمت
dynamic	پویا
pre service	پیش از خدمت
expreiment	تجربه
visualization	تجسم
abstraction	تجرید
amplifier	تقویت کننده
technological	تکنولوژی
explanation	توضیح توجیه
micro world	جهان کوچک
framework	چارچوب
multiple	چندگانه
conjecture	حدس
redefine	خط فرمان
arithmetic mean	خلاقیت
verification	درستی
dragging	درگ کردن
rigor	دقت
reorganize	دوباره سازماندهی کردن
heuristic	راهیابی
constuction	ساخت تفسیر
system	سیستم
cognition	شناخت

intuition.....	شهود
worksheet.....	صفحه کار
categorize.....	طبقه‌بندی کردن
metacognition	فراشناخت
cultural	فرهنگی
activity.....	فعالیت
inductive.....	قیاسی
focal.....	کانونی
discovery	کشف
animation.....	متحرک‌سازی
content.....	محتوا
modeling.....	مدلسازی
traditional.....	مرسوم
problem.....	مسأله
conceptual.....	مفهومی
software.....	نرم‌افزار
pedagogical.....	وابسته به آموزش و پرورش، پداگوژیکی

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

abstraction	تجريد
activity	فعاليت
amplifier	تقويت کننده
animation	متحرک‌سازی
arithmetic mean	خلاقيت
categorize	طبقه‌بندی کردن
cognition	شناخت
collaborate	باهم کار کردن
compass	پرگار
conception	ادراک، تصور
conceptual	مفهومی
conjecture	حدس
constuction	ساخت
content	محتوا
cultural	فرهنگی
curriculum	برنامه آموزشی
deduction	استنتاج
discovery	کشف

dragging	درگ کردن، کشیدن
dynamic	پویا
evalution	ارزیابی
explanation	توضیح
exploration	اکتشاف
expressive	پرمعنی
expreiment	تجربه
focal	کانونی
framework	چارچوب
heuristic	راهیابی
implementation	اجرا
induction	استقرا
inductive	قیاسی
instruction	آموزشی
intersection	اشتراک
intuition	شهود
manipulative	بادستکاری
metacognition	فراشناخت
micro world	جهان کوچک
modeling	مدلسازی
multiple	چندگانه
open- source	بازکد
pedagogical	وابسته به آموزش و پرورش، پداگوژیکی
platform	برنامه کار، سطح فکر
post service	پس از خدمت

pre service	پیش از خدمت
problem	مسأله
prove	اثبات
redefine	خط فرمان
reflection	بازتاب
reorganizer	دوباره سازماندهی کردن
rigor	دقت
software	نرم افزار
strategy	استراتژی
system	سیستم
technological	تکنولوژی
traditional	مرسوم
utilize	بکار گرفتن
verification	درستی
visualization	تجسم
worksheet	صفحه کار

کتاب نامه

- [1] Ol. Aksoy, Ob. Bayazit, D. Soybau, The Effects of GeoGebra in conjectures and proofs, Erciyes Univ, Turkey, Proc. First North Amer. GG. Conf. July 27–28, 2010 Ithaca College, NY(190–195).
- [2] V. Antohe, Limits of educational soft GeoGebra in a critical constructive review, Faculty of Engineering , Annals. Com. Scien. Series. 7th Tome 1st Fasc. 1 – 2009.
- [3] G.S. Antohe, Modeling a geometric locus problem with GeoGebra, student, Faculty of Math, Unive. Bucharest, Romania, Annals. Com. Scien Series. 7th Tome 2st Fasc. 2 – 2009.
- [4] Z. A. Reis, S. Gulsecen, The effect of the GeoGebra use in mathematics education:a case study on integers in Turkey, Proc. First North Amer. GG. Conf. July 27–28, 2010 Ithaca College, NY(180–189).
- [5] O. Bayazit, Y. Aksoy, O. A. Olhan, GeoGebra as an instructional tool to promote student operational and structural conception of function, Ecriyes Univ, Turkey, Proc. First North Amer. GG. Conf. July 27–28, 2010 Ithaca College, NY(117–122).

- [6] L. Bu, H. Henson, M. Wright, Y. Alghazo, F. Mumba, GeoGebra integrated professional development: the experience of rural inservice elementary (K-8) teachers, Proc. First North Amer. GG. Conf. July 27-28, 2010 Ithaca College, NY (2-10).
- [7] H. S. M. Coxeter, The Problem of opollonius, American Mathematical Monthly, Vol. 75, No. 1 (Jan. 1968), 5-15.
- [8] L. Dikovic, Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level
- [9] J. Duffin, Using virtual manipulatives to support, teaching and learning mathematics, NLVM, Utah State Univ, Proc. First North Amer. GG. Conf. July 27-28, 2010 Ithaca College, NY (18-26).
- [10] M. E. Gage, embedding GeoGebra applets in webwork homework, Proc. First North Amer. GG. Conf. July 27-28, 2010 Ithaca College, NY (11-17).
- [11] T. Gastauer, Fun and diversions with GeoGebra, Brooks Academy, Math Dept. Chair, San Antonio, TX, Proc. First North Amer. GG. Conf. July 27-28, 2010 Ithaca College, NY (162-165).
- [12] G. Gorghiu¹, N. Pauna², and L. M. Gorghiu³, Solving Geometrical locus problems using dynamic interactive geometry applications, Automatics, Informatics and Electrical Engineering Department, Valahia University Targoviste, 18-24 Unirii Blvd, 130082 Targoviste, Romania.

- [13] S. Gulsecen¹, T. Kabaca², Z. A. Reis³, E. Kartel⁴, Reflections on the first Eurasia meeting of GeoGebra: expriences met on where continents meet, Proc. First North Amer. GG. Conf. July 27–28, 2010 Ithaca College, NY(172–179).
- [14] E. S. Haciomeroglu, L. Bu, G. Haciomeroglu, Integrating technology into mathematics education teacher courses, Proc. First North Amer. GG. Conf. July 27–28, 2010 Ithaca College, NY(27–32).
- [15] L. Healy, C. Hoyles, Software tools for geometrical problem solving: potentials and pitfalls, Inst. Edu. Unive. Lon. U.K. Journal Com. Math. Learn (2001), 6, 3, 235–256.
- [16] M. Hohenwarter, J. Hohenwarter, Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers: The case of GeoGebra. J.Comp.Math.Sci.Teach, 28,(2009),Proc. First North Amer. GG. Conf. July 27–28, 2010 Ithaca College, NY(135–146).
- [17] M. Hohenwarter, K. Jones, Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra, May 15, 2010, (ip27–3), BSRLM–IP–27–3–22.
- [18] C. Hoyles, K. Jones, Proof in dynamic geometry contexts, (1998).
- [19] S. E. Kasten¹, N. Sinclai², Using dynamic geometry software in the mathematics classroom: A study of teachers choices and rationales, Northern Kentucky, Univ, Col. Edu. Human Serv,

- Kentucky, USA and Simon Fraser Univ, Faculty. Edu, Burnaby, Canada.
- [20] J. KATONA, Solving 2 and 3-dimensional problems with help of dynamical geometry software, Szie Ybl Miklos Faculty Budapest
- [21] Z. Lavicza, M. Hohenwarter, A. Lu1, Establishing a professional development network with an open-source dynamic mathematics software, Camb. Unive and Flor State Unive.
- [22] C. Mammana, V. Villani (Eds), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Dordrecht: Kluwer. pp121-128.
- [23] A. G. Manizade1, M. Mason2, Choosing GeoGebra applications most appooriate for teachers, current geometry classroom: Pedagogica Perspective, Proc. First North Amer. GG. Conf. July 27-28, 2010 Ithaca College, NY(214-218).
- [24] D. M. Russo, T. L. Schroeder, V. Mudaly, J. D. Ball, N. Nutakki, Using GeoGebra to create resources for Teacher in high needs areas: a collaboration between U.S. and South African Teacher Educator, Proc. First North Amer. GG. Conf. July 27-28, 2010 Ithaca College, NY(131-135).
- [25] F. Olivero, Hiding and showing construction elements in a dynamic geometry software: a focusing process, Graduate School of Education, Unive. Bristol UK, Prague (2006), Group. Psy. of Math. Edu. (Vol. 4, pp. 273-280).

- [26] F. Olivero, R. Sutherland, The churchill Cabri project: back-ground and overview, Graduate School of Education, University of Bristol.
- [27] F. Ozyildirim, Oylum Akkus-Ispir, Vildan Guler, Sema Ipek, B. Aygun Preservice mathematics teachers views about using geometrs sketchpad, University of Hacettepe, Turkey.
- [28] G. Roulet, GeoGebra as a component of online collaboration mathematics investigations : present work toward realizing a dream, Faculty of Education, Proc. First North Amer. GG. Conf. July 27-28, 2010 Ithaca College, NY (166-171).
- [29] D. M. Russo¹, T. L. Schroeder², V. Mudaly³, J. D. Ball⁴, N. Nutakki⁵, Using GeoGebra to create resources for teachers in high needs areas: a collaboration between U.S. and South African, Teacher Educators, Proc. First North Amer. GG. Conf. July 27-28, 2010 Ithaca College, NY(131-135).
- [30] K. Ruthven, Linking algebraic and geometric reasoning with dynamic geometry software final report to the qualifications and curriculum authority, Unive. Cam. Faculty Educ, March 2003.
- [31] M. Sherman, A conceptual framework for using GeoGebra with teachers and students, Univ. Pittsburgh, PA, Proc. First North Amer. GG. Conf. July 27-28, 2010 Ithaca College, NY(205-213).

- [32] L. F. Stojanovska, V. Stojanovski, GeoGebra in the college classroomI multiple representation, Proc. First North Amer. GG. Conf. July 27–28, 2010 Ithaca College, NY(147–153).
- [33] I. E. Sutherland, Sketchpad a man–machine Graphical communication system, B.S., Carnegie Institute of Technology(1959), M.S., California Institute of Technology(1960).
- [34] Proceedings of the First North American GeoGebra Conference GeoGebra – NA 201 July 27–28, 2010 Ithaca College, Ithaca, NY.

[۳۵] کاکستر، ه.س.م. گریترز، س.ل. بازآموزی و بازشناخت هندسه، ترجمه عبدالحسین

مصطفی، انتشارات مدرسه، چاپ سیزدهم ۱۳۸۶

ABSTRACT

Last name: Hamidi		First name: Seyed Mostafa	
Title: The Impact of Software in learning mathetmatics			
Supervisor: Pr. Omid Ali Shehni Karamzadeh			
Advisor: Dr. Mehrdad Namdari			
Education grade: M.Sc		Course: Mathematic Education	
Faculty of Mathematical Science and Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz.			
Graduation date: 2011-09-06		number of pages: 90	
Keywords: Dynamic, Technology, Software, Sketchpad, Cabri, GeoGebra.			
Abstract: In a nearly of two decades of research in uses of technology in a mathematics classroom, by concerning the usage of technology by students and the core issues there by appears, some good opportunities have been offered to teachers and student, to obtain new experiences using technology, both in theory and in practice. in this thesis, by introducing the technology and by proposing that the forth milestone of history of mathematics is the use of technology, note to the applications of a Dynamic Geometric System, DGS, in a mathematics classroom and discussed that using technology one may have a better visualizing and intuition after using these facilities. by introducing Testing Assisted Par Ordinture, TAO, and reports from TIMSS we will be familiarized with the roles of technology in thelearning of mathematics. In the second chapter, we introduce some application such as Cabriand Sketchpad. the third chapter introduces the software GeoGebra along with practical example. finally, conclusion and recommendation will be discussed in the last chapter.			