



مدلسازی مسائل هندسی با استفاده از GeoGebra

سید مصطفی حمیدی^۱

مehشید مرادی شلال^۲

ایلام، فرهنگیان، مؤسسه آموزش عالی باختر ایلام

s.mostafa.hamidi@yahoo.com

چکیده:

بهره‌گیری از ICT در برنامه‌ی درسی همواره یکی از برنامه‌های آموزشگران آموزش ریاضی بوده است. حال سؤال این است که دستاوردهای ICT برای آموزش ریاضی چیست؟

۱- دریافت بازخورد سریع از رایانه و مشاهده‌ی بلافاصله‌ی اثر تغییرات اعمال شده بر خروجی نمایش داده شده در نمایشگر، فرصت فرضیه‌سازی و بررسی فرضیه‌های ساخته شده را برای دانش‌آموزان فراهم می‌کند. ضمن آنکه صحت پاسخ‌های بدست آمده برای یک مسأله، توسط رایانه به راحتی آشکار خواهد شد.

۲- تغییرات متوالی، منظم و کنترل شده بر روابط ریاضی از قبیل معادله یک تابع و مشاهده رفتار آن در صفحه، جایگذاری مقادیر مختلف عددی در یک فرمول و بررسی نتایج حاصله از آن و غیره، می‌تواند الگوی نهفته در اشیا و اشکال ریاضی را آشکار سازد و دانش‌آموزان را به سمت تعمیم دادن صحیح احکام ریاضی، هدایت کند.

۳- به تصویر کشیدن ایده‌ها و تصورات ذهنی دانش‌آموزان جهت بررسی صحت آنها و یا داشتن درک درست‌تر و بهتر نسبت به موضوع، بخصوص در هندسه، با کمک رایانه‌ها به راحتی در دسترس است.

در این مقاله سعی بر آن شده است تا با معرفی نرم افزار جئوجبرا و ارائه چند مثال ریاضی و هندسی، مدلسازی یک مسأله مکان هندسی را با استفاده از این نرم افزار نشان داده، تا معلمان اهمیت بکارگیری این نرم افزار را در امر آموزش ریاضی و بخصوص هندسه متوجه شوند و رغبت دانش‌آموزان را برای استفاده از آن بیشتر نمایند.

واژه‌های کلیدی: جئوجبرا، نرم افزار، هندسه، آموزش.

۱- مقدمه

امروزه معلمان برای طراحی سؤالاتی که تکنولوژی جدید را بکار گیرد و به عنوان یک راهنما برای یادگیرندگان باشد رقابت زیادی می‌کنند و به همین خاطر همکاری و مشارکت معلمان در بکارگیری تکنولوژی برای فهم مفاهیم هندسی سخت به نظر می‌رسد. به همین منظور باید امکانات بیشتری فراهم آورد تا بتوان با کار گروهی برای معلمان و دانش‌آموزان در سطح مناطق، کشور و قاره‌ای به نتایج درستی از کاربرد و استفاده از تکنولوژی رسید.

استفاده از جئوجبرا یکی از راه‌حل‌های پیشنهادی برای کاربرد تکنولوژی در تدریس ریاضیات مدارس و دانشگاهی است. جئوجبرا به سرعت محبوبیت و شهرت زیادی در میان معلمان و محققان در اطراف جهان پیدا کرده است، چون یک نرم‌افزار پویای ریاضیات است که به آسانی به کار برده می‌شود و برخی مفاهیم متفاوت ریاضیات را ترکیب می‌کند. در مجموع به خاطر

۱- کارشناس ارشد آموزش ریاضی، از دانشگاه شهید چمران اهواز، مدرس مؤسسه آموزش عالی باختر ایلام

۲- کارشناس ارشد آموزش ریاضی، از دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، کوی نفت، ارشاد ۱۵، m_moradi9017@yahoo.com



ماهیت بازکد بودن، کاربرد آن در میان کاربران انجمن‌های مربوطه به طور وسیعی توسعه یافته است، همچنین خود نرم‌افزار در حال ویرایش است.

دانش‌آموزان برای استفاده از جئوجبرا به عنوان یک ابزار نمایش به اهداف واضح ریاضیات نیاز دارند. برای تعدادی از موضوعات ریاضیات، نمایش می‌تواند موجب اثبات قضایایی شود که با برهان خلف، استقراء یا روشهای دیگر انجام شده‌اند. اما تفاوت در اثباتهای هندسی بیشتر می‌باشد، چون این اثباتها توضیحی می‌باشند. جئوجبرا به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا احساس شهودی، تجسم فکری و تصور مفهومی بهتری از موضوعات ریاضی و فرآیندهای آن، بخصوص در هندسه و جبر داشته باشند. در واقع با این نرم‌افزار می‌توان مفاهیم ریاضی را در سطوح مختلف ریاضیات بیان کرد. زیرا هر معلم خود بیان می‌کند که چگونه از این نرم‌افزار استفاده کند. همچنین می‌توان کاربردهای تکنولوژی را توسعه داد و آن را برای آموزش پیش و پس از خدمت معلمان طوری بنا کرد که بتوانند به آن دسترسی داشته باشند. براساس برخی مطالعات، پیوند بین نمایش گرافیکی (نقطه، پاره خط و ...) و موضوعات جبری نظیر (مختصات، طول و ...) به دانش‌آموزان فرصتی برای کشف فرمول‌هایی از محیط و مساحت را می‌دهد. در واقع دانش‌آموزان به یک بینش عمیق به عنوان یک قرارداد بین هندسه و جبر خواهند رسید. توجه به این نکته که هنگام چنین مطالعاتی باید کار اکتشافی بررسی شود، ضروری به نظر می‌رسد.

۲- GeoGebra

جئوجبرا (هندسه و جبر) یک نرم‌افزار ترکیب کننده هندسه، جبر و حساب دیفرانسیل و انتگرال و نمونه‌ای از نمایش‌های آنهاست (هوهن وارتر، جونز، ۲۰۰۷) و یکی از نرم‌افزارهای کدباز ریاضی می‌باشد که اخیراً طراحی شده و در مؤسسه ملی دانشگاه کمبریج توسعه یافته است. در واقع این نرم‌افزار نمایش دهنده‌ی یک سطح فکر کامل است که تجربیات و کشف فعالیت‌های در سطوح اولیه و رو به بالای آموزش را طراحی می‌کند (هوهن وارتر، جونز، ۲۰۰۷). این نرم‌افزار را می‌توان به صورت آزاد از سایت www.GeoGebra.org یا www.tebyan.net دانلود کرد. جئوجبرا بر روی دامنه‌ی وسیعی از عملکرد سطح فکر کار می‌کند و برای راه اندازی بر روی java نصب می‌شود. این نرم‌افزار ابزار چندکاره‌ای را برای تجسم ایده‌های ریاضیات از مقدمات تا سطوح دانشگاهی فراهم می‌کند.

دکتر مارکوس هوهن وارتر و دکتر زولت لایوزا کسانی هستند که به استفاده از جئوجبرا در آموزش ریاضی علاقمند شدند و یک گروه کاری ملی به نام "مؤسسه ملی جئوجبرا" را تشکیل دادند. آنها به توسعه‌ی یک روش تکنیکی و کاربرد آموزشی آن توجه داشتند. این گروه در کشور ترکیه توسط دو مؤسسه‌ی آنکارا و استانبول حمایت می‌شود. اولین نشست رسمی جئوجبرا در کشور استرالیا در جولای ۲۰۰۹ در شهر لنیز با عنوان Euroasia Meeting of GeoGebra گرفته شد. همچنین اولین نشست اوراسیای جئوجبرا در کشور ترکیه برگزار شده است. این ابزار مفاهیم هندسه پویا را در درون فایل‌هایی از جبر و آنالیز توسعه می‌دهد.

در اینجا توانایی مهم جئوجبرا این است که به طور همزمان در یک صفحه‌ی نمایش، دو پنجره، یکی هندسی و دیگری جبری دارد که هر تغییر در یک پنجره موجب تغییر در پنجره‌ی دیگر، متناظر با تغییر انجام شده در پنجره‌ی قبلی می‌شود. به عنوان مثال با مشخص کردن یک نقطه در پنجره هندسی، مختصات آن نقطه در پنجره‌ی جبری مشخص می‌شود و با تغییر دادن مکان نقطه همزمان در پنجره جبری مختصات نقطه تغییر خواهد کرد. در واقع فرصتی برای حرکت بین دو پنجره ایجاد می‌شود. یعنی مثلاً با حرکت دادن نشانگر موس و با مشاهده معادله، کاربر می‌تواند معادله‌ای را تغییر دهد و همزمان آن تغییر را در پنجره هندسی مشاهده کند. یا اینکه از طریق ابزارهایی مانند خطوط نیمساز، عمود منصف و میانه و رسم اشکالی همچون مثلث و دایره، اصول اقلیدس و قضایا، مسائل و خواص هندسی را در محیط این نرم‌افزار نمایش داده و با حدس درباره‌ی مسائل مختلف به حل جبری و هندسی آنها بپردازد. برخی فعالیت‌های مناسب با جئوجبرا:

۱- روش‌های جدید و یادگیری ریاضیات با استفاده از جئوجبرا؛

۲- تأثیر استفاده از جئوجبرا در موفقیت دانش‌آموزان با مثال‌های متنوع؛



- ۳- اثبات‌های جبری و هندسی با استفاده از جئوجبرا؛
 - ۴- برانگیختن و تشویق دانش‌آموزان برای یادگیری ریاضیات با جئوجبرا؛
 - ۵- تجسم فکری ساختمان منحنی‌های پارامتری متفاوت؛
 - ۶- مشتق و انتگرال با استفاده از جئوجبرا و فهم بهتر این مطالب ریاضیات.
- و غیره.

در کلاس‌های درس می‌توان همزمان با معلم از استراتژی‌های خاص برای تدریس و یادگیری شخصی به نام معلم - دانش‌آموز استفاده کرد که با کمک او دانش‌آموزان در یک جلسه گروهی به جای یک سیستم اصلاحی - اساس فقط تمرین می‌کنند (مای فیلد، بارکو، ۱۹۹۵، فرایکلم، ۱۹۹۸). با وجود اینکه برخی معلمان بیشتر در پی فرصت‌های جدید برای تدریس می‌باشند اما طراحی سئوالات ریاضی از طریق جئوجبرا و فرآیندهای حل مسأله و نمایش رابطه‌ی عملی این مسائل برای تدریس ریاضیات و استفاده از ابزارهای جدید برای ترکیب روشهای جدید تفکر مؤثر است. به همین خاطر امروزه از نمایش‌های ویدیویی برای کاربرد و اجرای جئوجبرا استفاده می‌شود. این ویدیوها یک شکل غیرهمزمان از آموزشی را فراهم می‌کنند که تأثیر تدریس با جئوجبرا را نشان می‌دهد.

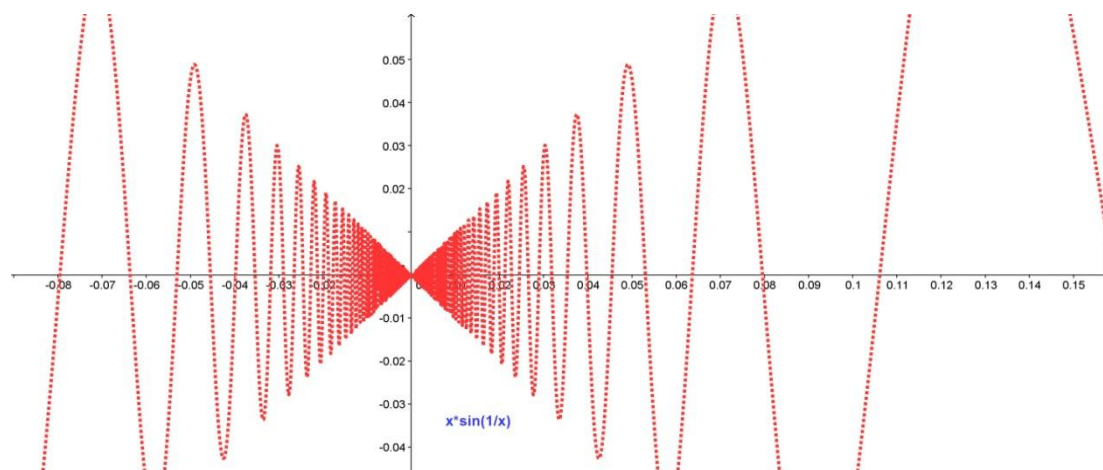
یک مطلب جالب آن است که برخی احساس می‌کنند که چون جئوجبرا به صورت ریاضی ساخته نشده است بیشتر برای آنها سخت است. آنها فکر می‌کنند که جئوجبرا یک شکل جدید از ریاضیات است که برای آن سبک خاصی در نظر گرفتند. در یک جمله "جئوجبرا راهی را برای دانش‌آموزان به داخل ریاضیات باز می‌کند". معلمان ضمن خدمت در استفاده از جئوجبرا با روشهای گوناگون، حوزه‌ای از کشف ریاضیات شخصی، نتایج بهتر به سوی ریاضیات و تدریس آن و بازتاب‌های وابسته به برنامه آموزش و پرورش، آشنا، و از آنها بهره‌مند می‌شوند.

جئوجبرا می‌تواند یک سطح فکر کارآمد برای یادگیری باشد، یک نرم‌افزار که با کار با آن می‌توان مثالهای زیادی را برای حساب، جبر، هندسه و حساب دیفرانسیل و انتگرال طراحی کرد و سپس این مثالها را توسعه و تعمیم داد. این امر یک جایگاه خاص برای سطح فکر پیدا خواهد کرد، تا آنجا که همه‌ی کاربران قبول می‌کنند که تحقیق برای طراحی و توسعه‌ی مثالها یک راه انتقادی ساختاری، نه اغلب منحصر و خاص می‌باشد. با بکارگیری جئوجبرا دانش‌آموزان می‌توانند مفاهیم خلاصه را ببینند، با همدیگر و با معلمان ارتباط برقرار کنند و ریاضیات را کشف کنند. قابلیت تشخیص و تعیین راه‌حل‌های دانش‌آموزان به صورت الکترونیکی علاقه و انگیزه‌ی دانش‌آموزان به ریاضیات را تقویت می‌کند و توانایی‌های قابل درک دانش‌آموزان را توسعه می‌دهد. همچنین محیط‌های یادگیری آنلاین به دانش‌آموزان اجازه می‌دهد تا بیشتر از ریاضیات بهره‌مند شوند.

استفاده از جئوجبرا یکی از راه‌حل‌های پیشنهادی برای کاربرد تکنولوژی در تدریس ریاضیات و بخصوص هندسه‌ی مدارس و دانشگاهی است. جئوجبرا به سرعت محبوبیت و شهرت زیادی در میان محققان در اطراف جهان پیدا کرده است، چون یک نرم‌افزار پویای ریاضیات است که به آسانی به کار برده می‌شود و برخی مفاهیم متفاوت ریاضیات را ترکیب می‌کند.

۳- یک درس ترسیمی از توابع حقیقی

بسیاری از توابع حقیقی بررسی و تحلیل کلاسیک آنها مشکل می‌باشد تابع $f: R - \{0\} \rightarrow R$ را در نظر می‌گیریم. برای این تابع در همسایگی نقطه‌ی صفر مشکلاتی از نظر فهم وجود دارد (شکل ۱).



(شکل ۱)

در اینجا جنوجبرا همانطور که در شکل می بینیم با یک آشکارسازی حقیقی این بدفهمی را برطرف نماید. زمانی که با جنوجبرا این توابع را ترسیم می کنیم در مدت زمان کمتری نسبت به ترسیم با قلم و کاغذ این کار را انجام می دهیم، که این خود موجب گسترش و توسعه ی مسائل مناسب برای مطالعه و پژوهش می شود. ضمناً دانش آموزان در حین ترسیم و حل مسأله با نرم افزار نه تنها نگرانی نخواهند داشت، بلکه وقتی که تجربه ی آنها را در حین انجام کار، از آنها می خواهیم هم با علاقه به توضیح ترسیم خود می پردازند، هم با اشتیاق بیشتری به آن ادامه می دهند. اما نمی توان گفت که همه ی مسأله تنها همین است که گفتیم، بلکه اگر نتوانیم اثبات کنیم که چه اتفاقی حول صفر افتاده است یک محدودیت در یادگیری و تدریس پیش خواهد آمد. در اینجا این معلم است که مکمل نرم افزار خواهد بود و اثبات ریاضی مسأله را برای دانش آموزان در کنار ترسیم بیان می کند.

۴- قضیه ی دایره دکارت

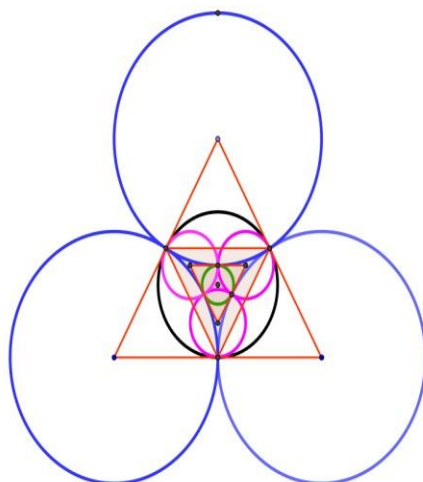
سه قرن قبل از میلاد آپولونیوس پرگایی دو کتاب درباره مماس ها نوشته بود. او می گفت هر چیزی می تواند از یک نقطه، خط یا یک دایره بدست آید. و اینکه دایره ای بسازیم که از نقاط خاصی می گذرد و بر خطوط و دوائر مشخص مماس می شود. حال این مسأله زمانی جالب می شود که همه ی اینها دایره باشند. این مسأله تمرین ابتکاری تعدادی هندسه دان سرشناس همچون ویتا و نیوتن است. نمونه ی زیر توسط دکارت و شاگرد محبوبش پرنسس الیزابت، دختر فردریک بررسی شده بود.

مسأله: سه دایره ی نامتقاطع داریم که کاملاً بیرون یکدیگر و دو به دو مماس بر هم می باشند. در واقع مراکز این دوائر بر رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع قرار دارند. حال سه دایره ی دیگر درون مثلث بزرگ مشابه حالت دوائر قبلی ترسیم می کنیم که به طور متقابل در سه نقطه ی مجزا مماس هستند. حال یک دایره بر این دوائر مماس می کنیم بطوری که محاط بر مثلث می باشد. در نهایت یک دایره از محل تماس این سه دایره می گذرد (شکل ۲).

رابطه ی (۱-۴) بین شعاع دایره ی محاطی و سه دایره ی مماس درونی این دایره برقرار است:

$$2 \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right)^2 \quad (1-4)$$

این مطلب به قضیه دایره دکارت معروف است [۸].

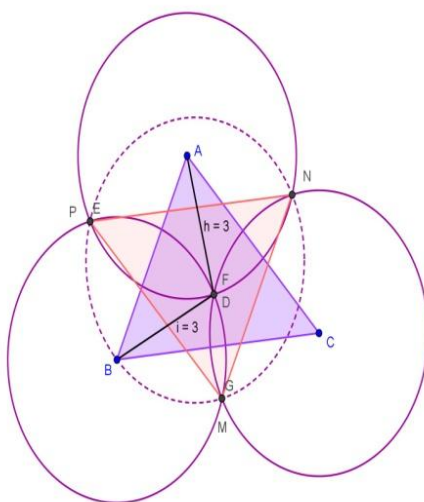


(شکل ۲)

۳- مسأله سکه طلایی

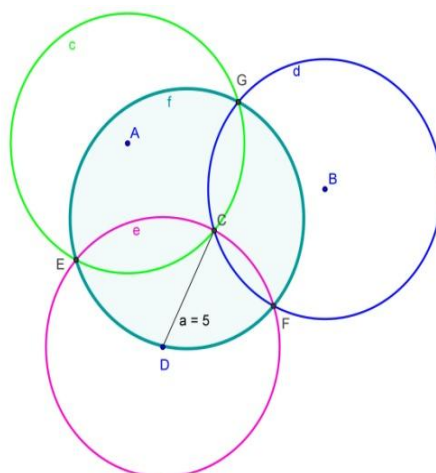
مسأله زیر توسط Gheorghe Tztzeica یک ریاضیدان رومانی کشف شد. این کشف ریاضیدان رومانی به عنوان یک کار فرهنگی و ریاضی بزرگ محسوب می‌شد. به دلیل اهمیت و نوع ابتکار و ابعاد آن بیشتر از ۲۰۰ مقاله و کتاب متعدد از او چاپ شده است (کتاب مسأله در هندسه problem book in geometry بیش از ۱۲ چاپ دارد). او با کشیدن دوائر با یک "سکه طلا" بر روی یک کاغذ در حال بازی بود و یک مسأله که امروز آن را "پول طلایی" نامیده‌اند، کشف کرد. در واقع این نامگذاری برای آن است که سراسر جهان بتوانند یک چنین کشفیاتی را انجام دهند [۱].

۳-۱- مسأله: سه دایره‌ی متجانس با مراکز A, B, C را در نظر بگیرید که یک نقطه‌ی مشترک با نام D دارند. N, M, P را نقاط اشتراک هریک از دو دایره در نظر بگیرید. نشان دهید که دایره‌ی محیطی مثلث MNP با سه دایره با مراکز C, B, A متجانس است. به عبارت دیگر باید نشان دهیم که شعاع دایره محیطی MNP برابر شعاع سه دایره اول می‌باشد (شکل ۳).



(شکل ۳)

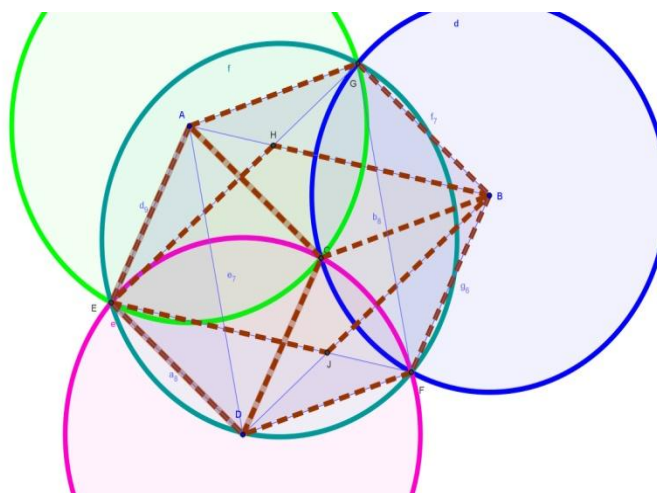
(مرحله ۱): بطور کلی ثابت می‌کنیم که اگر دو دایره متجانس در دو نقطه همدیگر را قطع کنند، آنگاه نقاط اشتراک و مراکز دوائر یک متوازی‌الاضلاع می‌سازند. همانطور که می‌بینیم d, c, b, a همه به طول ۵ واحد هستند. به طریق مشابه دوائر e و f شعاع‌های برابر در معادله‌ی تحلیلی خود دارند (شکل ۴).



(شکل ۴)

(مرحله ۲): حال در جستجو و تلاش برای مرتب کردن تمام فرضیه‌ها و حدسیات مسأله Tzitzeica هستیم. ساختار توافقی ما با استفاده از جنوجبرا نمی‌تواند سه دایره همانطور که در فرضیه Tzitzeica هست، ایجاد کند.

ساختار را بصورت زیر توسعه می‌دهیم: ابتدا دو دایره، بعد یک پاره خط با طول شعاع این دو دایره، و سرانجام دایره سوم. در واقع مراحل ما یک دایره می‌کشد اگر و فقط اگر سه پارامتر مرکز، شعاع و نقطه‌ی ثابتی که دایره از آن می‌گذرد را داشته باشیم. همانطور که می‌توانیم طی فرآیند ساختاری ببینیم، شعاع دایره f, e, d, c را از ۱۰ واحد بدست می‌آوریم. ولی انحراف وجود دارد. در اینجا یک ساختار بهتر بدست آمد، اما مطلوب ما نیست. هرچند بعضی لوزی‌ها از شکل را با استفاده از نقاط اشتراک دایره ساختیم اما می‌بینیم که تعدادی متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌شوند که با هم برابرند. اما در اینجا تعدادی از حدسیات و انتظارات پیش بینی شده‌ی ما با اثبات‌های ریاضی دقیق سازگار نمی‌شود [۱]. با این مشاهده، شعاع دایره S را در معادله‌ی تحلیلی $r^2 = 24,03$ بدست می‌آوریم و سایر نتایج قابل پیش بینی مانند مساحت مثلث ABC یا مثلث GFE حدود $30,09$ واحد می‌باشد (شکل ۵).



(شکل ۵)

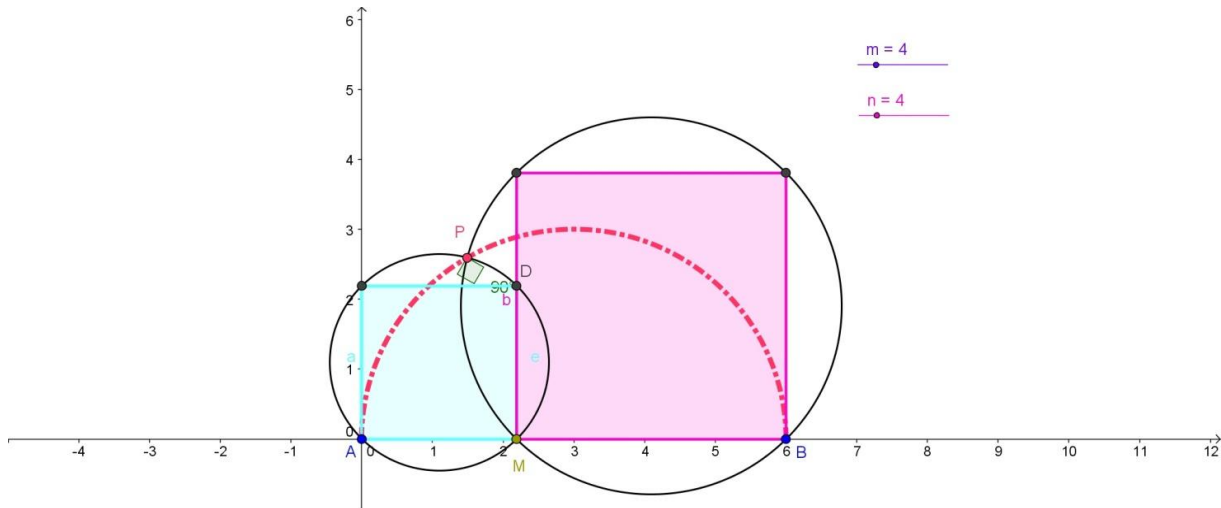
۴- مدل‌سازی یک مسأله مکان هندسی با استفاده از GeoGebra

برای فهم بیشتر مطالب بالا با استفاده از ابزار Slider مکان هندسی را برای حل یک مسأله از هندسه نمایش می‌دهیم. در اینجا در هر دو مسیر تحلیلی و کاربردی، همراه با تحلیل نرم‌افزاری بررسی خواهد شد.



صورت مسأله: روی خط ثابت d نقاط ثابت A و B و نقطه‌ی متحرک M در صفحه π مطلوبند. و در صفحه π چندضلعی منتظم با طول ضلع AM و طول ضلع BM به ترتیب با m ضلع و n ضلع برای $m, n \in \mathbb{N}$ و $m, n \geq 3$ ساخته شده است. دایره‌های محیطی این چندضلعی‌ها در M و P همدیگر را قطع می‌کنند. مکان هندسی نقطه P خواسته شده است [۱۰].

برای حل این مسأله دو حالت $m=n$ و $m \neq n$ را در نظر می‌گیریم. در هر دو حالت چندضلعی‌ها می‌توانند در یک طرف خط d یا هر کدام جداگانه در طرفین خط d قرار بگیرند. خط d را به عنوان محور x ها با نقاط A و B با مقادیر ثابت a و b و نقطه‌ی M در نظر می‌گیریم که هر سه نقطه‌ی A ، B و M فقط مؤلفه‌های x دارند (شکل ۶).



(شکل ۶)

نرم‌افزار به ما اجازه می‌دهد که حدس راجع به مسأله را ترسیم کنیم، چندضلعی منتظم را با تعداد اضلاع مشخص بسازیم، تعداد اضلاع چندضلعی‌ها را به آسانی تغییر دهیم، مکان هندسی نقطه معین P را ایجاد کنیم و در نهایت آن را تشخیص دهیم. با استفاده از نرم‌افزار جنوجبرا نتایج زیر بدست می‌آید:

(الف) اگر $m=n$ باشد و چندضلعی‌ها منتظم در یک نیم صفحه‌ی یکسان باشند مکان هندسی P از برخورد یک کمان با طول AB و کمان $\frac{360^\circ}{n}$ و نیم خطهای XA و XB بدست می‌آید. وقتی که M نیم خط XA را می‌پیماید یعنی $x \in (-\infty, a)$ دوایر مماس هستند و $P=M$. وقتی که M پاره خط AB را بپیماید یعنی $x \in [a, b]$ آنگاه P کمان APB را با کمان $\frac{360^\circ}{n}$ تعریف می‌کند. وقتی M پاره خط BX یعنی $x \in (b, +\infty)$ را می‌پیماید، دوایر مماس هستند و $P=M$. فهمیدیم که خط MP زمانی که $x \in [a, b]$ از یک نقطه‌ی ثابت P_0 می‌گذرد، جایی که P_0 نقطه‌ی میانی کمان است که کمان AP_0B را به شکل دایره کامل می‌کند. یعنی کمان AP_0B به اندازه‌ی کمان $(\frac{360^\circ}{n}) - 180^\circ$ می‌باشد.

(ب) اگر $m=n$ باشد و چندضلعی‌های منتظم در دو نیم صفحه‌ی متفاوت باشند. مکان هندسی P ، از برخورد کمان‌های P_0A و $B P_0$ با اندازه‌ی کمان $(\frac{360^\circ}{n}) - 180^\circ$ بدست می‌آید و AB را قطعه قطعه می‌کنند و دوایر بر هم مماس می‌باشند. وقتی M نیم خط $X'A$ را می‌پیماید یعنی $x \in (-\infty, a)$ ، نقطه‌ی P کمان P'_0 را توصیف می‌کند و دوایر مماس درونی هستند. وقتی M پاره خط AB را می‌پیماید یعنی $x \in [a, b]$ ، دوایر مماس بیرونی هستند و $P=M$. وقتی M پاره خط BX یعنی $x \in (b, +\infty)$ را می‌پیماید، دوایر مماس درونی هستند و نقطه‌ی P خم $B P_0$ را توصیف می‌کند. نقاط P_0 و P'_0 مکان هندسی نیستند. ثابت می‌شود که خط MP از نقطه ثابت P'_0 می‌گذرد وقتی که $x \in (-\infty, a)$ و از نقطه‌ی P_0 می‌گذرد وقتی که $x \in (b, +\infty)$ در حالتی که $m=n=4$ کمان مورد نظر مکان هندسی یک نیم دایره را مشخص می‌کند و کمان‌های $A P'_0$ و $B P_0$ از دو ربع دایره‌اند.

(ج) اگر $m < n$ باشد و چندضلعی‌های منتظم در یک نیم صفحه یکسان باشند. مکان هندسی نقطه‌ی P از برخورد سه کمان است: AQ^* با اندازه‌ی کمان $(\frac{1}{m} - \frac{1}{n})180^\circ$ که اندازه آن $\frac{360^\circ}{n}$ می‌باشد، AP_0B با اندازه کمان $(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})180^\circ$ و اندازه

کمان AP^* برابر $\frac{26.0}{n}$ است و BP^* با اندازه کمان $(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}) \cdot 180^\circ$. کمان های AP^* و AQ^* برابر هستند و به خط d وابسته اند. وقتی M نیم خط $X'A$ یعنی $x \in (-\infty, a)$ را می پیماید، نقطه P کمان AQ^* را توصیف می کند. وقتی M خط AB یعنی $x \in [a, b]$ را می پیماید نقطه P کمان AP^*B را توصیف می کند. وقتی M پاره خط BX یعنی $x \in (b, +\infty)$ را می پیماید، نقطه P کمان BP^* را توصیف می کند. نقاط Q^* و P^* نقاط مکان هندسی نیستند، با محدود کردن موقعیتهای نقطه P هنگامی که X به ترتیب به سمت $+\infty$ و $-\infty$ می رود.

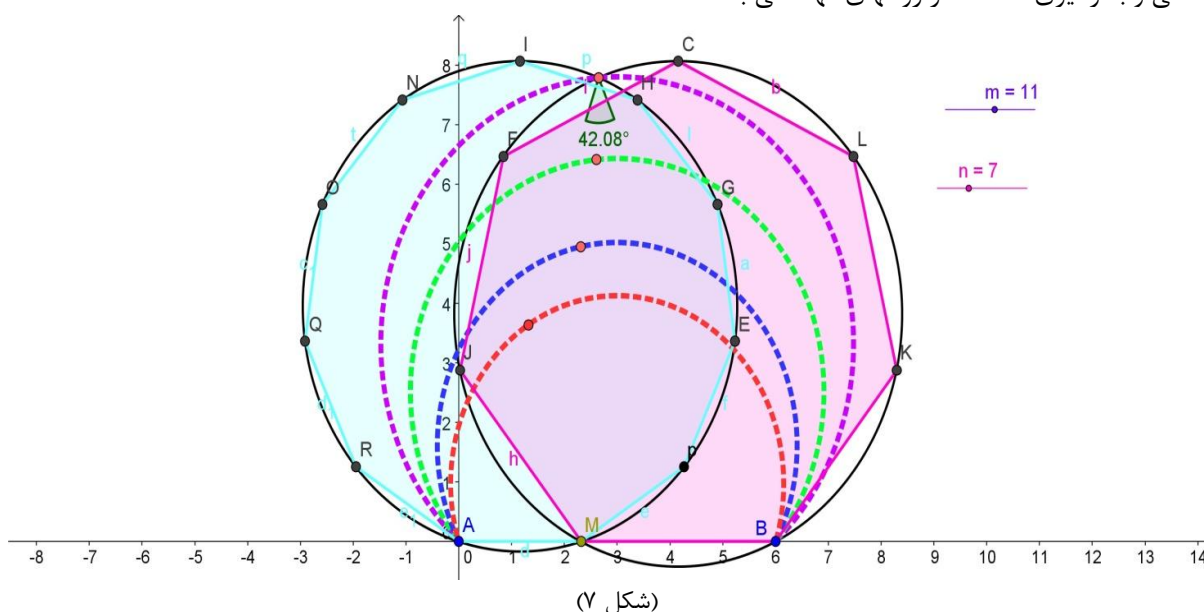
د) اگر $m < n$ باشد و چندضلعی‌های منتظم در دو نیم صفحه متفاوت باشند، مکان هندسی نقطه P از برخورد سه کمان AT^* ، $(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}) \cdot 180^\circ$ و اندازه کمان آن $\frac{360}{n}$ با اندازه کمان $\frac{360}{n}$ و کمان BS^* که اندازه آن $\frac{360}{n}$ می‌باشد. وقتی M نیم خط $X'A$ یعنی $x \in (-\infty, a)$ را می‌پیماید نقطه P کمان AT^* را توصیف می‌کند. وقتی M خط AB یعنی $x \in [a, b]$ را می‌پیماید نقطه P کمان APB را توصیف می‌کند. وقتی M پاره خط BX یعنی $x \in (b, +\infty)$ را می‌پیماید، نقطه P کمان BS^* را توصیف می‌کند. کمان‌های AT^* و BS^* برابر و به خط d وابسته هستند. نقاط S^* و T^* با محدود کردن موقعیت‌های نقطه P وقتی X به ترتیب به سمت $+\infty$ و $-\infty$ می‌رود، نقاط مکان هندسی نیستند.

در حالت معین $m=3$ و $n=4$ مکان هندسی براساس (۳) کمتر از یک نیم دایره است. و کمان‌های AT^* و BS^* از (۴) روی دایره با قطر AB قرار می‌گیرند و اندازه‌ی آنها 90° می‌باشند.

مشاهده: حالت $m > n$ به طور مشابه با حالت $m < n$ است.

نتیجه: مکان هندسی ارائه شده در چهار حالت تصاویر هندسی از مجموعه اعداد حقیقی ارائه می‌دهد که مسیر نشان داده شده بوسیله پیکان‌ها را می‌پیماید (شکل ۷).

مرحله به مرحله ساختار که تغییر عینی از یک زمینه ریاضی را ارائه می‌دهد، یک مسأله از مکان هندسی را برای مراحل بعدی دنبال خواهد کرد: ساختن اشکال هندسی بر پایه‌ی حدس‌های مسأله، به کار بردن تبدیلات هندسی، حرکت نقطه M در طول خط AB، فهمیدن ارتباط بین ساختار اقلیدسی و اثبات، اثبات با استفاده از انیمیشن و کلیدهای تابعی آن و فهمیدن ارتباط هندسی و جبری در اثبات‌های خیلی دقیق. یک درک از کاربردهای آموزشی کشف هندسه در محیطی پویا هم به عنوان یک ابزار تحقیق و هم به عنوان ابزار نمایش (اثبات) ارتباط بین آموزشگر ریاضی و متخصصین در informatics یکی از بهترین‌هاست. اصطلاح Dynamic Info Geometry می‌تواند یک روش تازه از آموزش ریاضی باشد. حل این مسأله و مسائل مشابه دیگر شروع تحقیقات آینده برای ریاضی کاربردی است و بکارگیری آن در مهندسی می‌تواند راهی بسوی ترکیب هندسه و مهندسی و بکارگیری هندسه در روشهای مهندسی باشد.





۵- نتیجه گیری

می توان با توصیف چگونگی ساختار ابزارهای جنوجبرا نقشه ی درس خود را طرح و بیان کرد. بیشتر دروس شامل فعالیت های مرتبط با هم و با موضوعات و روابط ریاضیات اند و بیشتر، دانش آموز - محور هستند. برخی معلمان به محدودیت استفاده از فعالیت پویا اشاره می کنند و قصد ندارند به دانش آموزان اجازه دهند برای مفاهیم ریاضیات، با این فعالیت ها کشف کنند یدلیل بیاورند.

کانون تحقیقات امروزه بررسی این موضوع است که جنوجبرا به دانش آموزان در کشف، بیان و ارتباط فرضیات هندسی کمک می کند. در واقع مسائل هندسی ابتدایی و ساده ای هستند که نتایج آنها با جنوجبرا بررسی می شوند و سئوالات مناسبی را برای معلمان بوجود می آورد، که ضوابط جدید با نتایج مطلوب برای دانش آموزان فراهم می کنند. روش تفکر هندسی هم در مفاهیم هندسی با استفاده از یک DGS به یک کلاس کارگاهی نیاز دارد.

همه ی مسائل با جنوجبرا به بهترین شکل نمایش داده نمی شوند. مسائل باید به طور منظم انتخاب و طراحی شوند و براساس بلوغ ریاضیاتی دانش آموزان، با برقراری یک سطح مشخص از انعطاف پذیری شناختی، وابسته به آموزش و پرورش انتخاب و طراحی شوند. اینجاست که در طراحی روشهای کلی به اهمیت تئوری های آموزشی توجه داریم. زمانی که تکنولوژی های پویا با موضوعات ریاضیات و برنامه ی آموزشی به هم پیچیده می شوند، تلاش برای توسعه ی رسمی استفاده از تکنولوژی اغلب سخت تر می شود. در واقع در اینجاست که جنوجبرا به کنترل پیچیدگی این ارتباط و فراهم کردن تجربیات یادگیری عینی برای معلمان و دانش آموزان کمک بیشتری می کند.

به هر حال تحقیقات کمتری بر روی اینکه چرا، چگونه و کجا معلمان استفاده از تکنولوژی را در کلاس های درسی انتخاب می کنند، شده است. این امر مخصوصاً به عنوان راهنمایی برای اجرای استراتژی ها، برای برنامه ی آموزشی، کتاب درسی و برنامه های نرم افزار و همچنین آموزش پیش از خدمت و ضمن خدمت معلمان و دانش آموزان است. و پیشنهاد می کنیم اساتید معلمان و دانش آموزان بصورت پیوسته و گروهی در این زمینه کار کنند. در نهایت اینکه هدف از تألیف کتابهای مختلف در زمینه ی نرم افزارهای هندسی، توسعه ی کلاسهای هندسه طبق برنامه آموزشی جدید، بدون صرف زمان زیاد است. در پایان اینکه معلمان آینده در دوره هایی از روشهای پیش نیازی یادگیری، توسعه و تدریس با تکنولوژی در یک کلاس واقعی، ارزیابی و بازتاب بر روی تدریس خود و اشتراک تجربیات با همکلاسی ها حین اجرا، تحت نظارت اساتید ثبت نام کنند.

تشکر و قدردانی صمیمانه تشکر از استاد راهنما جناب آقای پروفیسور امیدعلی شهنی کرمراده و استاد مشاور جناب آقای دکتر مهرداد نامداری به خاطر زحمات پیوسته از شروع دوره ارشد اینجانبان تاکنون.

مراجع

- [۱] کاکستر، ه.س.م.، گریترز، س.ل. بازآموزی و بازشناخت هندسه، ترجمه عبدالحسین مصحفی، انتشارات مدرسه، چاپ سیزدهم ۱۳۸۶
- [۲] V. Antohe, Limits of educational soft GeoGebra in a critical constructive review, Faculty of Engineering , Annals. Com. Scien. Series. ۲th Tome ۱st Fasc. ۱ – ۲۰۰۹.
- [۳] Z. A. Reis, S. Gulsecen, The effect of the GeoGebra use in mathematics education:a case study on integers in Turkey, Proc. First North Amer. GG. Conf. July ۲۷-۲۸, ۲۰۱۰ Ithaca College, NY(۱۸۰-۱۸۹).
- [۴] M. Sherman, A conceptual framework for using GeoGebra with teachers and students, Univ.Pittsburgh, PA , Proc. First North Amer. GG. Conf. July ۲۷-۲۸, ۲۰۱۰ Ithaca College, NY(۲۰۵-۲۱۳).
- [۵] S. Gulsecen^۱, T. Kabaca^۲, Z. A. Reis^۳, E. Kartel^۴, Reflections on the first Eurasia meeting of GeoGebra: expriences met on where continents meet, Proc. First North Amer. GG. Conf. July ۲۷-۲۸, ۲۰۱۰ Ithaca College, NY(۱۷۲-۱۷۹).
- [۶] K. Ruthven, Linking algebraic and geometric reasoning with dynamic geometry software final report to the qualifications and curriculum authority, Unive. Cam. Faculty Educ, March ۲۰۰۳.



چهارمین همایش ملی آموزش

4th National Conference On Education



- [۷] M. Hohenwarter, K. Jones, Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra, May ۱۰, ۲۰۱۰, (ip۲۷-۳), BSRLM-IP-۲۷-۳-۲۲.
- [۸] M. Hohenwarter, J. Hohenwarter, Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers : The case of GeoGebra. J.Comp.Math.Sci.Teach, ۲۸,(۲۰۰۹),Proc. First North Amer. GG. Conf. July ۲۷-۲۸, ۲۰۱۰ Ithaca College, NY(۱۳۵-۱۴۶).
- [۹] H. S. M. Coxeter, The Problem of opollonius, American Mathematical Monthly, Vol. ۷۵,No. ۱(Jan. ۱۹۶۸), ۵-۱۵.
- [۱۰] V. Antohe, Limits of educational soft GeoGebra in a critical constructive review, Faculty of Engineering , Annals. Com. Scien. Series. ۷th Tome ۱st Fasc. ۱ – ۲۰۰۹.